Elettromagnetismo in 20 pagine

Una presentazione elementare

Guido Cioni

Il seguente “documento” (così mi piace chiamarlo) nasce da un’esigenza di riassumere in poche pagine tutti i concetti fondamentali dell’Elettromagnetismo incontrati nello studio a livello universitario . La mia idea è stata quella di raccogliere da varie fonti ,quali testi universitari o materiale trovato in rete, spunti per una esposizione più chiara e schematica , libera del formalismo matematico in eccesso che spesso trova posto sui maggiori testi di studio. Ho cercato di imporre una divisione il più possibile coerente con l’importanza di ogni singolo capitolo nello studio dell’intera materia in modo da permettere la creazione di uno schema mentale , atto ad eliminare l’inutile conoscenza delle sole “formule” troppo difficili da ricordare a memoria . L’obiettivo principale è stato comunque , e rimane , quello di fare un ripasso generale di tutti i concetti necessari a svolgere gli esercizi del corso di Fisica B1 presso l’Università di Pisa. Spesso , troppo occupati a districarsi tra operatori e campi vettoriali , ci si scorda infatti di quali siano le basi di tale materia che risultano essere più semplici e appetibili se vengono viste da un’ottica più generale. Ecco quindi che il testo è consigliato a chi , già avendo un’infarinatura delle nozioni di base , voglia controllare la sua preparazione sull’intero programma e cercare di memorizzare meglio i concetti.

Si invita caldamente il lettore a suggerire correzioni , revisioni , suggerimenti che possano accrescere e migliorare il valore del testo. La mia è stata semplicemente un tentativo ma grazie all’aiuto di tutti potrebbe diventare un riferimento per lo studio.

Indice

1) Carica elettrica , leggi fondamentali del campo elettrico
2) Campo elettrico e potenziale
3) Dipoli
4) Conduttore in campo elettrostatico
5) Problemi generali dell’elettrostatica
6) Conduttori capacitivi
7) Dielettrici e polarizzazione
8) Il vettore D
9) Energia di un sistema di cariche
10) Energia del campo elettrostatico
11) Correnti
12) Circuiti
13) Prime evidenze del campo magnetico
14) Leggi fondamentali del campo magnetico
15) La magnetizzazione dei materiali , il vettore M
16) Il vettore H
17) Induzione magnetica , Legge di Lenz
18) Autoinduzione , mutua induzione
19) Energia del campo magnetico
20) La corrente di spostamento
21) Equazioni di Maxwell

Elettrodinamica

1.Carica elettrica , Leggi fondamentali del campo elettrico

Possiamo dire che la carica di un corpo caratterizza l'intensità dell'interazione elettrica subita dal corpo e in questo senso verrebbe spontaneo un paragone con la massa, che caratterizza l'intensità dell'interazione gravitazionale: dalla massa e dalla carica dipende il comportamento di un corpo rispetto alle due diverse interazioni. Alla massa però è legata un'altra caratteristica indipendente dal tipo di reazione : essa esprime , in base alla legge della dinamica di Newton , la risposta di un corpo a qualsiasi forza , cioè l'inerzia del corpo. Solo sperimentalmente si trova che la massa inerziale è eguale a quella gravitazionale. Il ruolo della massa appare pertanto duplice rispetto a quello della carica. Le proprietà specifiche delle due grandezze sono molto differenti. La carica elettrica presenta due segni , è quantizzata , si conserva ed è relativisticamente invariante , cioè ha lo stesso valore in ogni sistema di riferimento. La massa ha un solo segno , non è quantizzata e non si conserva ; come la carica essa è relativisticamente invariante .
Bisogna però sottolineare che alcune di queste proprietà si manifestano chiaramente solo nei fenomeni microscopici. Se consideriamo ad esempio la quantizzazione della carica , essa è evidente a livello atomico e subatomico , ma diventa inapprezzabile non appena il valore della carica è tale che non si riescono a misurare variazioni dell'ordine della carica elementare. Di conseguenza nei normali esperimenti di elettrostatica le cariche in gioco non mostrano la loro natura discreta. Invece la conservazione della carica si manifesta sempre , sia nei processi elementari , sia nei fenomeni macroscopici. Nel caso della massa , la non conservazione è evidente solo quando possono avvenire trasformazioni di massa in energia . Quando però si considerano fenomeni macroscopici ordinari , come nello studio della dinamica dei corpi solidi o delle proprietà dei fluidi , non ci sono le condizioni perché avvengano trasformazioni di massa in energia o viceversa. Infine un'importante proprietà delle due caratteristiche fondamentali a livello subatomico è che la massa totale (protoni , neutroni , elettroni) rimane costante mentre si possono avere significative variazioni di carica con il vincolo che quella totale rimanga costante.

Un concetto fondamentale nello studio dell'elettromagnetismo è quello di campo , statico , dovuto ad una distribuzione di carica. Posto in questi termini il campo appare come una grandezza formale , utile per separare nella formula della forza il contributo della sorgente e quindi scrivere la forza come interazione di carica con un campo. La presenza del campo è rilevabile esclusivamente attraverso un'interazione , ad esempio la forza subita da una carica , e questa è una notazione basilare, valida per il campo elettrostatico come per quello magnetostatico .

La legge che esprime la forza elettrica tra cariche ferme o in moto con piccola velocità è la Legge di Coulomb .

$$\vec{F} = k_0 \frac{qQ}{r^2} \hat{r}$$

La dipendenza $1/r^2$ comporta che per $r \to 0$ la forza tende all'infinito, il che non ha senso fisico : questo vuol dire che la carica veramente puntiforme non è un oggetto reale. Non abbiamo difficoltà ad ammettere ciò per i corpi macroscopici che non sono ovviamente mai puntiformi. Esiste però in natura l'elettrone le cui dimensioni sono inferiori a $10^{-17} m$ e che porta la carica elementare e : esso per definizione è un oggetto puntiforme carico. Un'altra caratteristica tipica della Legge di Coulomb , come della legge gravitazionale Newtoniana , è la cosiddetta azione a distanza : l'interazione avviene senza che ci sia contatto tra i copri. Questa proprietà appare molto diversa da quelle di altre forze che si studiano in meccanica . In realtà ciò avviene perché la materia è neutra ; però , quando ad esempio si spinge un corpo , si tende ad avvicinare moltissimo le distribuzioni elettroniche degli atomi dell'oggetto che spinge del corpo e nascono forze elettriche repulsive che danno luogo alla forza effettivamente osservata. Dall'unione dei due concetti di

forza e campo elettrostatico si arriva alla formulazione della legge fondamentale per l'elettrostatica , come lo era il principio di Newton per la dinamica.

$$\vec{F} = q\,\vec{E} \implies \vec{E} = k_0 \frac{Q}{r^2}\,\hat{r} \;\; ; \;\; k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Dopo una breve introduzione di tipo qualitativo occorre però trovare dei metodi matematici per poter calcolare il campo elettrico , da cui si può poi ricavare la forza , per distribuzioni di carica nello spazio. Il principio di sovrapposizione ed il Teorema di Gauss sono i primi ausili in tal senso .
Il primo segue direttamente dalla definizione di campo elettrico , sfruttando la proprietà di addizione dei vari contributi , il secondo invece ha un'interpretazione matematica più complessa.

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = k_0 \sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\,\hat{r}_i \quad ; \quad \oint \vec{E}\, d\vec{\Sigma} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

Queste prime due proprietà permettono di calcolare il campo elettrico in un numero assai limitato di casi ove sia esplicitamente presente una simmetria (sferica , cilindrica..) . Nonostante questo, risultano di vitale importanza nella risoluzione di molti problemi e portano , nel caso della Legge di Gauss, alla formulazione di una delle leggi di Maxwell.
Definendo l'operatore

$$\nabla \equiv \sum_i \hat{x}_i \partial_{x_i}$$

si ha infatti la forma locale della precedente legge

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

L'operatore ∇ può essere utilizzato per dimostrare un'altra importante proprietà (terza legge di Maxwell). Infatti introducendo il rotore come l'operatore di calcolo vettoriale definito da

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

si ricava immediatamente dai calcoli che

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

La legge si può scrivere in forma integrale , considerando la circuitazione del campo elettrico lungo un percorso e ottenendo

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$$

2. Campo elettrico e potenziale

La conservatività del campo elettrico suggerisce la ricerca di una primitiva al pari del potenziale gravitazionale o elastico in meccanica. La definizione di potenziale si estende con poca fatica al campo elettrostatico , infatti si ricerca una funzione V tale che

$$\int_A^B \vec{E}d\vec{l} = V_A - V_B \quad ; \quad \oint \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Un confronto diretto con la formula del lavoro di una forza porta alla conclusione che il potenziale è la quantità numericamente uguale all'energia potenziale di una carica unitaria positiva in un certo punto del campo elettrostatico. La determinazione del potenziale si risolve quindi , conoscendo il campo elettrico in tutto lo spazio , eseguendo un integrazione diretta su un elemento infinitesimo di percorso avendo cura di aggiungere una costante di integrazione che dovrà essere ricavata ponendo le condizioni di continuità nello spazio. In questo modo si può calcolare facilmente il potenziale di un sistema discreto o continuo di cariche nello spazio notando che il principio di sovrapposizione vale anche per questo grazie all'additività dei differenziali.

$$V = k_0 \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad ; \quad V = k_0 \int_\tau \frac{\rho}{r}\, d\tau$$

Introducendo il potenziale come campo scalare si può risalire immediatamente al campo vettoriale che lo ha generato , ovvero si può determinare il campo elettrico. Infatti la relazione differenziale che lega queste due fondamentali grandezze è data da

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Quest'equivalenza differenziale tra un campo vettoriale ed uno scalare porta infine alla definizione di superfici equipotenziali , ovvero superfici dove la funzione V assume lo stesso valore. Si nota subito che il vettore E deve quindi essere sempre perpendicolare a queste linee di livello poiché rappresenta il gradiente , ovvero la direzione di massima pendenza.

3.Dipoli

I dipoli rivestono una grande importanza nello studio dei campi elettrostatici poiché molte distribuzioni di carica possono essere schematizzate , a grandi distanze , come dipoli generici. Infatti nella maggior parte delle distribuzioni di carica , una perturbazione qualsiasi o l'applicazione di un campo elettrico possono portare alla separazione , non netta me ben evidente , di cariche positive e negative , che si accumulano in diversi punti nello spazio. Nasce quindi l'idea di definire il dipolo come un sistema di due cariche uguali in modulo , ma opposte in valore , poste ad una certa distanza tra loro. Sistemi di questo genere sono quindi caratterizzati dai valori $+q$, $-q$, d che danno immediatamente origine ad una grandezza vettoriale specifica dei dipoli , definita come momento $\vec{p} = q\vec{d}$.
Conoscendo questa grandezza si può immediatamente risalire al potenziale da cui poi si ricava il campo elettrico , utilizzando la relazione differenziale illustrata nel paragrafo precedente.

$$V = k_0 \frac{p\cos\vartheta}{r^2} \Longrightarrow \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = k_0 \dfrac{2p\cos\vartheta}{r^3} \\ E_\vartheta = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = k_0 \dfrac{p\sin\vartheta}{r^3} \end{cases}$$

Dopo aver specificato il campo che genera un dipolo nello spazio circostante appare utile determinare il comportamento di questo quando è immerso in un campo elettrico esterno. Per risalire allo stato di moto occorre determinare le equazioni del moto , utilizzando i principi della meccanica classica. Tale operazione non è sempre immediata poiché la forza che agisce sul dipolo risulta essere dipendente dalla derivata direzionale del campo elettrico lungo la direzione del momento di dipolo. Assumendo però che nella

maggior parte dei casi il moto si sviluppa in maniera armonica intorno al centro di massa si può passare direttamente al calcolo del momento $\overrightarrow{M_F} = \vec{p} \times \vec{E}$
Infine un metodo diverso per lo studio del moto si ottiene calcolando prima l'energia del dipolo $U = -\vec{E}\vec{p}$ e derivando rispetto all'angolo per trovare le posizioni di equilibrio stabile o instabile.

4.Conduttore in campo elettrostatico

Risulta difficile dare una descrizione dettagliata della variazione di un campo elettrico in una sostanza qualsiasi. Se infatti nello spazio vuoto è stato possibile calcolare esplicitamente il campo elettrico derivato da distribuzioni di carica nello spazio , nel caso di sostanze tale operazione è complicata dato che questo cambia continuamente variando la posizione. Tale campo non ci sarà però utile nel seguito quindi l'unico risultato , di natura statistica , che concerne questa parte , mette in relazione il campo microscopico con quello macroscopico.

$$\vec{E} = \vec{E}_{macro} = \langle \vec{E}_{micro} \rangle$$

La configurazione precedente cambia improvvisamente quando la sostanza ,o il corpo, viene immerso in un campo esterno. In questo caso si assiste al fenomeno dell'induzione elettrostatica , ovvero le cariche positive e negative all'interno della sostanza tendono a orientarsi in maniera equiversa al campo elettrico, formando delle distribuzioni di segno complessivo opposto tra loro. In un conduttore tale operazione porta allo spostamento delle cariche negative nel verso opposto della direzione del campo e viceversa per le cariche positive. In questo modo la configurazione che si ha nel caso statico è quella di un campo elettrico nullo all'interno del conduttore. Questo significa che la superficie individuata dal conduttore è equipotenziale , ovvero tutti i punti che si trovano dentro sono allo stesso potenziale. Le cariche che si accumulano sulle superfici , opposte tra loro , del conduttore danno quindi luogo ad una densità di carica superficiale σ che porta alla formazione di un campo elettrico $E = \sigma/\varepsilon_0$. Inoltre la composizione di questo campo elettrico con quello generato da tutte le altre cariche del sistema nella regione dove è localizzata la carica σ porta alla formazione di una pressione elettrostatica calcolabile considerando la forza per unità di superficie e sostituendo il campo elettrico calcolato prima

$$\vec{P}_e = \frac{\vec{F}}{\Sigma} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{n} \ .$$

Infine praticando un foro nel conduttore non si perturba il campo elettrico esterno, infatti la cavità divide l'intero spazio nella parte interna ed esterna che sono completamente indipendenti tra di loro per quanto concerne il campo elettrico.

5.Problemi generali dell'elettrostatica

Nei capitoli precedenti abbiamo quindi visto che la ricerca del campo elettrico in tutto lo spazio si riconduce alla ricerca della funzione potenziale , dalla quale i il campo elettrico segue per derivazione. Derivando questa relazione differenziale si arriva all'equazione di Poisson che coinvolge l'operatore Laplaciano

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Questa equazione pone quindi delle condizioni per la determinazione del potenziale in uno spazio dove è presente una qualsiasi distribuzione di carica volumetrica ρ .

Immaginiamo ora di avere un conduttore qualsiasi con una carica di fronte ad esso . In questo caso le linee del campo elettrostatico si infrangono sul conduttore , modificando quindi la configurazione . Quindi il problema di calcolare campo e potenziale elettrostatici di un sistema di cariche posto nelle vicinanze di un conduttore mantenuto a un determinato potenziale , nonché la densità di carica indotta sulla superficie del conduttore , è ricondotto alla ricerca di un altro sistema di cariche , poste al di là della superficie del conduttore , che insieme a quelle reali abbiano tale superficie come superficie equipotenziale al valore corretto. Le cariche fittizie così introdotte si chiamano cariche immagini.

6.Conduttori capacitivi

Si nota sperimentalmente che in un qualsiasi conduttore isolato la carica è direttamente proporzionale al potenziale . Risulta quindi immediato porre costante la quantità definita come capacità elettrostatica

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Avvicinando altri corpi al conduttore isolato si forma un sistema in cui le cariche presenti sul primo conduttore inducono cariche di segno opposto sugli altri corpi. In questo modo la capacità totale aumenta . Un sistema di questo genere viene detto condensatore : quello più semplice è costituito da due piastre conduttrici separate da una piccola distanza . Si possono creare condensatori con diverse simmetrie (cilindrici , sferici) che differiscono per le capacità , quindi per la carica che riescono ad accumulare allo stesso voltaggio. Dai calcoli diretti si nota infine che la capacità è una grandezza dipendente solo dalla geometria del conduttore.

$$Condensatore: \begin{cases} piano \rightarrow C = \varepsilon_0 \dfrac{\Sigma}{h} \\ sferico \rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{ab}{b-a} \\ cilindrico \rightarrow C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)} \end{cases}$$

7.Dielettrici e polarizzazione

I dielettrici sono sostanze che non conducono in pratica corrente elettrica. Questo significa che , ad esempio , contrariamente ai conduttori , non contengono cariche che possono muoversi su distanze considerevoli e creare corrente elettrica.
Dunque quando un dielettrico , anche neutro , viene introdotto in un campo elettrico esterno , si osservano cambiamenti considerevoli nel campo e nel dielettrico stesso. Infatti il dielettrico sotto l'azione del campo si polarizza : nel caso di molecole apolari le cariche opposte si accumulano ai lati opposti del dielettrico mentre se sono presenti molecole polari queste si orientano in maniera equiversa al campo. Dunque il meccanismo di polarizzazione dipende dalla struttura interna del dielettrico. Come risultato di questa polarizzazione , sulla superficie del dielettrico e nel volume interno compaiono delle cariche in eccesso (cariche di polarizzazione). Tale evidenza è data dallo spostamento delle distribuzioni di carica nel dielettrico ρ'_+ , ρ'_- che da neutro ($\rho'_+ = \rho'_-$) passa sotto l'influenza di un campo elettrico esterno che sposta le due distribuzioni , inizialmente in equilibrio. Come conseguenza di questo comportamento il campo elettrico in un dielettrico va calcolato come la sovrapposizione del campo dovuto alle cariche che non costituiscono le molecole dielettriche (ma che possono comunque trovarsi all'interno del dielettrico) $\vec{E}_0$ con il campo generato dalle cariche di polarizzazione $\vec{E}'$. Si ha quindi , per il campo complessivo

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

Il fenomeno della polarizzazione suggerisce di estendere alla trattazione la nozione di momento di dipolo. Infatti la polarizzazione può essere schematizzata come quel vettore che esprime la media dei momenti di tutte le particelle fatta sul volume .

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta\tau}\sum_i \vec{p}_i = n\,\langle\vec{p}\rangle \quad con\ \ n = \Delta N/\Delta\tau$$

Sperimentalmente si scopre che il vettore polarizzazione è legato linearmente con il campo complessivo presente nel dielettrico dalla relazione

$$\vec{P} = \varepsilon_0\,\chi\,\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}\,.$$

ove si sono introdotte rispettivamente in ordine le quantità note come suscettività dielettrica χ e costante dielettrica relativa ε_r . Analogamente a quanto fatto per il campo elettrico , la relazione lineare che intercorre tra il vettore polarizzazione e il campo elettrico suggerisce di introdurre un risultato analogo a quello del teorema di Gauss , ovvero

$$\oint \vec{P}d\vec{\Sigma} = -q'_{int}$$

ove con q'_{int} si intendono ,e si indicheranno nel seguito, le cariche di polarizzazione interne al volume incluso nella superficie Σ . Tale espressione può essere espressa in forma differenziale come mostra la seguente

$$\nabla\,\vec{P} = -\rho'$$

Sorge spontaneo chiedersi per quali condizioni non sono presenti le cariche di polarizzazione. La risposta a questa domanda può essere ricavata direttamente dalla prima relazione facendo l'ipotesi di trovarsi in un dielettrico omogeneo.

$$\oint \vec{P}d\vec{\Sigma} = -q'_{int} \implies \chi \oint \varepsilon_0\vec{E}d\vec{\Sigma} = -q'_{int} \implies \chi\,(q_{int} + q'_{int}) = -q'_{int} \implies q'_{int} = -\frac{\chi}{1+\chi}\,q_{int}$$

$$q'_{int} = 0 \iff q_{int} = 0$$

Come ultima trattazione ci si propone di studiare le condizioni al contorno del vettore polarizzazione , ovvero le condizioni che devono essere poste quando ci si trova sulla superficie di separazione di due dielettrici : quindi nel caso più generale accostando due dielettrici isotropi omogenei. Su questa superficie infatti il vettore P_n , ovvero la proiezione del vettore polarizzazione sulla normale alla superficie ,subisce una discontinuità la cui grandezza dipende proprio dalla densità superficiale di carica di polarizzazione. Si ottiene quindi l'importante relazione

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n} \xrightarrow{2\to vuoto} \sigma' = P_n \implies \sigma' = \chi\varepsilon_0 E_n$$

8. Il vettore D

Possiamo applicare il teorema di Gauss ad un dielettrico considerando le cariche interne e di polarizzazione. In questo caso risulta utile introdurre una nuova quantità vettoriale , come risulta dal calcolo diretto

$$\oint \vec{E} d\vec{\Sigma} = (q + q')_{int} \Longrightarrow \oint (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{\Sigma} = q_{int} \Longrightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Longrightarrow \oint \vec{D} d\vec{\Sigma} = q_{int}$$

Tale vettore , chiamato induzione dielettrica , non ha un vero significato fisico ma rende più facile l'analisi di campi generati dai dielettrici. Dalla forma integrale si risale come al solito a quella differenziale ottenendo

$$\oint \vec{D} d\vec{\Sigma} = q_{int} \Longrightarrow \nabla \vec{D} = \rho$$

Il vettore appena introdotto è in correlazione con il campo elettrico totale , come si osserva semplicemente sostituendo la formula di polarizzazione per dielettrici isotropi

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

Ovvero i vettori induzione dielettrica e campo elettrico sono collineari nel caso di dielettrici isotropi.
Combiniamo le relazioni ricavate finora per determinare le condizioni al contorno (sulla superficie di separazione di due dielettrici isotropi) per i vettori $\vec{D}$ ed $\vec{E}$.
Si conclude che , in virtù dell'annullamento della circuitazione del campo elettrico e del teorema di Gauss per il vettore $\vec{D}$, sulla superficie si conserva la componente tangenziale del campo elettrico mentre il vettore induzione dielettrica subisce la discontinuità

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

Si noti che questa equazione differisce da quella della discontinuità del vettore polarizzazione poiché in quel caso la densità di cariche superficiale riguardava SOLO le cariche polarizzazione mentre in questo caso si ottiene una relazione con la densità di carica superficiale data dalla carica interna al dielettrico. A livello pratico questa condizione provoca la rifrazione delle linee del campo elettrico e del campo $\vec{D}$.
Riconoscendo che gli angoli formati dal campo elettrico con la normale hanno per tangente il rapporto delle componenti di questo vettore si ottiene la relazione

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{E_{2t}/E_{2n}}{E_{1t}/E_{1n}} \Longrightarrow \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$$

Nel caso si accoppi un dielettrico con un conduttore si ottiene che le condizioni sulla superficie sono date da $D_n = \sigma$. In questo caso si forma una carica di polarizzazione che si può ottenere utilizzando le condizioni

$$\begin{cases} E_n = (\sigma + \sigma')/\varepsilon_0 \\ E_n = \dfrac{D_n}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \sigma/\varepsilon_r \varepsilon_0 \end{cases} \Longrightarrow \sigma' = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma$$

Concludiamo osservando che l'inserimento di un dielettrico in un condensatore altera la capacità di quest'ultimo. Da risultati sperimentali si ricava che

$$C' = \varepsilon_r C$$

Ovvero la capacità aumenta con l'introduzione di un dielettrico. Nel caso in cui condensatori siano riempiti in parte con dielettrici ed in parte con il vuoto basta considerare la serie (se sono impilati) o il parallelo (se sono accostati) di diversi condensatori per ricavare la capacità totale.

9.Energia di un sistema di cariche

Per calcolare l'energia di un sistema di cariche si deve considerare il contributo che ogni particella da sulle altre. Riconoscendo inizialmente che l'energia è pari alla variazione negativa di lavoro si ottiene

$$\delta W_{1,2} = \vec{F}_1 d\vec{l} \implies \delta W_{1,2} = -dU_{12} \implies U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$$

Il termine moltiplicativo tiene conto dei contributi di ciascuna carica con le altre che si ripetono nella sommatoria. Si ha in generale

$$U = \frac{1}{2}\sum_i U_i = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i$$

Si passa facilmente alla definizione per un sistema continuo di cariche eseguendo l'integrale

$$U = \frac{1}{2}\int \rho V \, d\tau$$

Queste due formule però hanno un significato completamente diverso. La prima , infatti, corrisponde alla sola energia di interazione U_{12} mentre la seconda da l'energia totale di interazione , comprese le energie intrinseche U_1 , U_2 . Tramite la formula integrale si possono calcolare energie in molti casi . In un conduttore isolato , come in un condensatore (anche in presenza di dielettrico), si ottiene

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}$$

10. Energia del campo elettrostatico

Possiamo utilizzare le relazioni scritte prima per ricavare l'energia in funzione del valore del campo elettrostatico. Si ottiene infatti , considerando l'esempio di un condensatore piano (ma si può estendere facilmente il risultato ottenuto a qualsiasi configurazione)

$$U = \int \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2}{2} \, d\tau = \int \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} \, d\tau$$

Questo risultato può essere facilmente esteso al caso di due corpi carichi nel vuoto. In questo caso si ha, con ovvio significato dei termini

$$U = \int \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} \, d\tau + \int \frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} \, d\tau + \int \varepsilon_0 \vec{E}_1 \vec{E}_2 \, d\tau$$

Diversamente dal vettore campo elettrico l'energia , che è una quantità scalare , non è una quantità additiva . Infatti l'energia risultante dalla sovrapposizione dei due campi è in genere diversa dell'energia associata alla somma di questi.

11. Correnti

La corrente si realizza quando vi è passaggio di carica in un certo intervallo di tempo all'interno di un conduttore. Si può quindi scrivere , in termini di variazioni infinitesime di carica in un tempo infinitesimo :

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Siamo soliti pensare alla corrente come un flusso di elettroni che attraversa una certa superficie di un conduttore. Cerchiamo quindi di utilizzare una nozione vettoriale che possa generalizzare la nozione di corrente. Infatti nel caso in cui questa non sia distribuita uniformemente sulla superficie occorre caratterizzarla con maggiore precisione introducendo un vettore che rappresenta la sua distribuzione nello spazio.

$$I = \int \vec{J} d\vec{\Sigma}$$

Il flusso di corrente si può schematizzare come composto da portatori negativi e positivi , ovvero particelle caricate positivamente e negativamente che danno luogo ad una certa intensità di corrente. La sua densità può essere quindi espressa in funzione di questi portatori.

$$\vec{J} = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_- \implies \vec{J}(e^-) = \rho_- \vec{v}_-$$

Combinando le prime due equazioni si ottiene direttamente l'equazione di continuità

$$\int \vec{J} d\vec{\Sigma} = -\frac{dQ}{dt}$$

Questa equazione rappresenta una condizione che deve essere soddisfatta dalla densità di carica. Possiamo notare che in condizioni stazionarie la variazione di carica è nulla , mentre in condizioni dinamiche possiamo scrivere l'equazione di continuità in forma differenziale ottenendo

$$\nabla \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Per particolari conduttori (Ohmici) esistono leggi di natura sperimentale che legano la corrente a parametri caratteristici del conduttore , derivanti ad esempio dal materiale di costruzione o dalla struttura interna di questo. Tali leggi , scoperte da Ohm , possono essere riassunte nel seguente schema

$$I = \frac{V}{R} \quad , R = \rho \frac{l}{\Sigma}$$

Ove sono state introdotte la resistenza del conduttore R proporzionale alla resistività ρ e alla lunghezza e sezione del filo. Introducendo il vettore densità elettrica e passando quindi alla forma differenziale otteniamo le leggi derivanti

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

Ove σ è definita come conduttività del conduttore.
Questa ultima relazione è nota come Legge di Ohm per un punto. Infatti essa rappresenta la legge in forma locale poiché è una relazione tra quantità che caratterizzano le proprietà locali del conduttore. Risulta quindi che , dato un campo elettrico , è possibile trovare l'intensità di corrente che è prodotta e risalire immediatamente alla corrente eseguendo un'integrazione sulla superficie percorsa dalla corrente.
Possiamo utilizzare la legge di Ohm per dimostrare che in un conduttore percorso da corrente continua il campo elettrico è nullo. Infatti si ha che , l'unico modo perché l'integrale sia nullo è che la densità di carica volumetrica all'interno sia nulla.

$$\sigma \oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Le cariche in eccesso possono essere quindi disposte solo sulla superficie di un conduttore omogeneo , oppure nei punti dove questo sia in contatto con conduttori diversi, o dove il conduttore presenti delle disomogeneità. Queste cariche in eccesso danno luogo ad una componente normale di campo elettrico, come già detto per i dielettrici. Utilizzando la proprietà di discontinuità del vettore campo elettrico sulla superficie del conduttore si nota infine che all'esterno del conduttore il campo elettrico ha sia una componente tangenziale che una normale. Tale campo esterno , che è creato da cariche in movimento nel conduttore , può essere paragonato con quello creato da cariche stazionarie nella stessa posizione. Si osservi però che il campo elettrico nel caso di correnti stazionarie differisce da un campo elettrostatico creato da cariche in quiete poiché se le cariche fossero in equilibrio in campo all'interno del conduttore sarebbe nullo mentre il campo generato dalle correnti stazionarie è statico ma esiste anche all'interno del conduttore.

Per mantenere la continuità della corrente, devono essere applicate altre forze , dette estranee , diverse da quella di Coulomb , che trasferiscano continuamente le cariche positive e negative in direzioni opposte a quelle consentite dalle forze elettriche in modo che il moto non si fermi mai ma perseveri in un continuo riequilibrarsi di potenziali. Queste forze estranee portano alla formazione di un campo elettrico $\vec{E}^*$ che , inserito nella legge di Ohm , restituisce una forma più generalizzata di quest'ultima

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*)$$

12.Circuiti

Se integriamo tra due terminali qualsiasi di un circuito con resistenza R e generatore di tensione l'ultima espressione scritta assume una forma più specifica. Infatti

$$\int_A^B \frac{\vec{J} d\vec{l}}{\sigma} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} + \int_A^B \vec{E}^* d\vec{l} \implies I \int_A^B \rho \frac{dl}{\Sigma} = (V_1 - V_2) + \mathcal{E} \implies IR = (V_1 - V_2) + \mathcal{E}$$

In quest'ultima formula abbiamo riconosciuto la fem $\mathcal{E}$ come integrale del campo dovuto alle forze estranee sul percorso di integrazione ,la resistenza totale come integrale della resistività nella sezione del conduttore e la differenza di potenziale come integrale del campo elettrico sul percorso di integrazione.
Nello studio dei circuiti lineari questa legge è fondamentale per poter scrivere le equazioni di maglia , ovvero delle equazioni lineari che danno luogo a dei sistemi la cui risoluzione permette di determinare le correnti che attraversano il circuito. Per fare questo ci si serve anche delle leggi di Kirchoff che seguono dalla conservazione della carica e del campo elettrostatico.

$$\sum_k I_k = 0 \quad ; \quad \sum_k I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k$$

A titolo di esempio riportiamo il caso di scarica e carica di un condensatore in cui queste leggi sono applicate per ricavare l'andamento della carica e dell'intensità di corrente nel circuito. Questi casi possono riprodotti sperimentalmente realizzando circuiti con composizioni di elementi resistivi (caratterizzati da una resistenza R nota) e capacitivi (caratterizzati da una capacità C nota) . Per il processo di carica e scarica possiamo le equazioni di maglia, che si trasformano immediatamente in equazioni differenziali di facile risoluzione.

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{q}{RC} + \dfrac{\mathcal{E}}{R} \\ \dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{RC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ \tau = RC \\ q(t) = q_0 e^{-t/\tau} \end{cases}$$

Il passaggio di corrente attraverso un conduttore che possiede una resistenza è sempre accompagnato da un riscaldamento del conduttore e , quindi , da una produzione di calore. Per calcolare la quantità di calore prodotta da quest'effetto , chiamato effetto Joule , si usa la legge di Ohm ottenendo

$$P = RI^2 \implies P_\tau = \rho J^2$$

Osserviamo che il calore , fenomeno che osserviamo fisicamente , avviene in seguito alla dissipazione di questa potenza nel circuito. Questa equazione è la forma più generale della legge di Joule , applicabile a tutti i conduttori , omogenei e non omogenei , qualunque sia la loro forma , ma anche qualunque sia la natura della forza che produce la corrente elettrica.

13. Prime evidenze del Campo Magnetico

Sperimentalmente si osserva che la forza che agisce su una carica puntiforme dipende , in generale , non solo dalla posizione della carica ma anche dalla sua velocità. Gli esperimenti mostrano che questa forza è la composizione di una forza elettrica (che non dipende dal moto della carica) ed una forza magnetica (che dipende dalla velocità $\vec{v}$ della carica stessa). Si giunge quindi all'introduzione di un nuovo campo magnetico , CARATTERIZZATO dal vettore $\vec{B}$, che agisce SOLO su cariche in movimento. Dunque la forza totale agente su una particella in qualsiasi stato di moto è data dalla quantità vettoriale

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Abbiamo quindi ottenuto una generalizzazione della forza ricavata nella parte dedicata ai soli campi elettrostatici ; tale forza è composta dalla forza elettrica e dalla forza di Lorentz (magnetica) . E' immediato verificare che in assenza del campo magnetico ci si riconduce alla formula già vista in precedenza. La caratteristica peculiare della forza magnetica è quella di essere sempre perpendicolare alla velocità della carica. Ciò significa che la forza magnetica non compie alcun lavoro sulla carica e che quindi l'energia cinetica di una particella carica , che si muove entro un campo magnetico statico , rimane invariata indipendentemente dal tipo di moto della particella. Tramite questa espressione si può subito determinare il campo magnetico generato da una carica in moto rettilineo uniforme. Si ottiene, con ovvio significato dei simboli :

$$\vec{B} = k_0' \frac{q(\vec{v} \times \vec{r})}{r^3}$$

dove $k_0' = \mu_0/4\pi$ è l'analogo di k_0 per i campi magnetici.
In principio si credeva che i campi elettrici e magnetici fossero due unità prettamente distinte, senza legami interni. In seguito ad alcune scoperte sperimentali si iniziò però ad ipotizzare uno stretto legame tra le due teorie. Tale unificazione fu poi completata da Maxwell che alla fine dell'800 pubblicò le famose Equazioni che raccolgono sotto un unico sistema tutte le caratteristiche dei due campi (elettrico e magnetico). Nonostante alcune profonde differenze tra i due campi , i legami che intercorrono tra questi suggeriscono di utilizzare approcci simili nello studio individuale.

Si dimostra quindi che il principio di sovrapposizione vale anche per il campo magnetico : il campo magnetico totale è dato dalla risultante (somma vettoriale) di tutti vettori applicati nel punto dove si vuole calcolare. Inoltre a partire dalla formula del campo magnetico per una carica in movimento si può subito risalire a quello prodotto da cariche in movimento , quindi da una corrente. Si arriva così alla legge di Biot-Savart che si scrive, con ovvio significato dei simboli utilizzati :

$$d\vec{B} = k_0' \frac{(\vec{J} \times \vec{r})d\tau}{r^3} = k_0' \frac{I(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3} \implies \begin{cases} \vec{B} = k_0' \int \frac{(\vec{J} \times \vec{r})d\tau}{r^3} \\ \vec{B} = k_0' \oint \frac{I(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3} \end{cases}$$

Se un conduttore percorso da corrente è immerso in un campo magnetico , su ciascun portatore di carica in moto lungo il conduttore agirà una forza magnetica. Di conseguenza il conduttore sarà sottoposto ad una forza che si ricava direttamente dall'applicazione delle ultime leggi viste. Si ottiene quindi

$$d\vec{F} = I\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right) \implies \vec{F} = \oint I\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right)$$

La seconda forma dell'espressione restituisce la forza magnetica agente su un CIRCUITO CHIUSO percorso dalla corrente I , immersa in un campo magnetico. Se quest'ultimo è uniforme allora , poiché l'integrale $\oint d\vec{l}$ è nullo , significa che la forza totale sul circuito è nulla.
Uno strumento di semplice realizzazione e utile per lo studio dei campi magnetici è la spira , ovvero una corrente anulare piana di dimensioni sufficientemente piccole. Il comportamento di una spira in campo magnetico può essere descritto attraverso l'utilizzo del momento magnetico $\vec{m} = I\vec{\Sigma}$ che svolge la stessa funzione del momento di dipolo nei campi elettrostatici. In effetti tale equivalenza è sottolineata dal Teorema di Equivalenza di Ampère che sostiene l'uguaglianza formale , a grandi distanze , di spire e dipoli magnetici . Conoscendo il momento magnetico di una spira , o di un dipolo , si può immediatamente risalire alla forza che agisce sul corpo. Infatti

$$\vec{m} = I\vec{\Sigma} = I\,\Sigma\,\hat{n} \implies \vec{F} = m\frac{\partial B}{\partial \hat{n}}$$

Come per i dipoli elettrostatici si può ricavare il momento delle forze applicate e l'energia del dipolo

$$U = -\vec{m}\,\vec{B} \quad ; \quad \overrightarrow{M_F} = \vec{m} \times \vec{B}$$

14. Leggi fondamentali del Campo Magnetico

Come per ogni campo vettoriale , il campo magnetico può essere visivamente rappresentato attraverso le sue linee di campo , le quali, secondo la convenzione, sono tangenti al campo in ogni punto e tracciate in modo che la loro densità risulti proporzionale all'intensità del campo. Si esegue quindi un'analisi equivalente a quella fatta per il campo elettrostatico , evidenziando le caratteristiche che riguardando il flusso e la circuitazione del campo. La prima legge di Gauss costituisce una generalizzazione dei risultati sperimentali secondo i quali le linee di campo magnetico non hanno né inizio né fine.

$$\oint \vec{B}d\vec{\Sigma} = 0$$

In natura quindi non esistono cariche magnetiche dalle quali il campo B possa iniziare o sulle quali il campo possa terminare , in altri termini il campo magnetico non ha solo pozzi o sorgenti (cariche negative o positive) ma possiede necessariamente coppie di entrambi.
Il secondo risultato , che deriva dalla legge di Biot-Savart , si riassume nella formula

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \, I_{conc} = \mu_0 \int \vec{j} \, d\vec{\Sigma}$$

Tale legge mette in risalto una proprietà fondamentale del campo magnetico. A differenza di quanto succedeva per il campo elettrico infatti per quello magnetico non è possibile determinare univocamente un potenziale scalare. Tale potenziale può essere introdotto e usato solo in regioni dello spazio dove non siano presenti correnti. Queste due leggi fondamentali possono essere scritte in forma locale ottenendo rispettivamente, e con ovvio significato dei simboli

$$\vec{\nabla} \, \vec{B} = 0 \; ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Si riconosce immediatamente la differenza rispetto alle leggi locali per il campo elettrostatico. Quest'ultimo campo infatti , a differenza di quello magnetico , è irrotazionale e non ha la proprietà di essere solenoidale.

15. La magnetizzazione dei materiali , il vettore M

Se una sostanza viene introdotta in un campo magnetico esterno, questo subirà un cambiamento. In effetti ogni sostanza , in queste condizioni , si comporta come un magnete acquisendo un momento magnetico che introduce delle modificazioni nel campo esterno. Indicando con $\vec{B}'$ il campo proprio della sostanza , il campo risultante è dato da , indicando con $\vec{B}_0$ il campo esterno :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

In assenza del campo magnetico esterno i momenti magnetici intrinseci alle molecole che compongono una sostanza sono orientati casualmente in modo che il campo magnetico risultante sia nullo. Quando invece vengono posti un campo magnetico esterno i momenti magnetici si orientano tutti in un'unica direzione e la sostanza si magnetizza , come risultato appare quindi il campo magnetico proprio della sostanza. Il grado di magnetizzazione di una sostanza magnetica è caratterizzato dal momento magnetico per unità di volume. Per definizione , in un punto della sostanza , si ha quindi

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta\tau} \sum_i \vec{m}_i = n \, \langle \vec{m} \rangle$$

Se il vettore magnetizzazione è lo stesso in ogni punto di una sostanza si dice che la sostanza è uniformemente magnetizzata.
Ogni molecola che compone la sostanza è inoltre caratterizzata da una corrente che sta alla base della formazione dei momenti magnetici. La presenza di queste correnti molecolari può generare correnti macroscopiche I' chiamate correnti di magnetizzazione. Queste correnti si formano in seguito alla non compensazione delle correnti molecolari sulle superfici dei corpi magnetizzati.
Si può affermare che il contributo al campo delle correnti di magnetizzazione è uguale al contributo che le stesse correnti creerebbero nel vuoto. Sfortunatamente il campo magnetico totale non è direttamente calcolabile poiché in genere non si conosce la distribuzione delle correnti di magnetizzazione. Occorre quindi introdurre delle nozioni che facilitano la conoscenza di queste correnti. Nel caso di una corrente stazionaria vale che la circuitazione del vettore magnetizzazione è pari a

$$\oint \vec{M} d\vec{l} = I'$$

Come al solito questa equazione può essere scritta in forma locale ottenendo

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}'$$

Si presti attenzione che ,nonostante le proprietà del campo vettoriale $\vec{M}$ si riferiscano alle sole correnti di magnetizzazione, questo non viene determinato solo tramite queste ultime ma da tutte le correnti che concorrono nel mezzo.

16.Il vettore H

Come nel caso dei dielettrici conviene introdurre , per i materiali magnetizzati , una quantità vettoriale che , nonostante lo scarso significato fisico , semplifica i calcoli.

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I') \xrightarrow{\oint \vec{M} d\vec{l} = I'} \oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) d\vec{l} = I \implies \vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \implies \oint \vec{H} d\vec{l} = I$$

Si ottiene quindi che la circuitazione del vettore H lungo una linea arbitraria chiusa orientata è uguale alla somma algebrica delle correnti di conduzione concatenate con la linea. Si risale immediatamente alla forma locale del teorema della circuitazione per il vettore H :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$$

La relazione tra la magnetizzazione è il vettore H è lineare : analogamente a quanto già visto per la polarizzazione dei materiali si ha infatti

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \implies (1 + \chi_m) \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \implies \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

dove χ_m , detta suscettività magnetica è una costante che dipende dal tipo di materiale (ferromagnetico , paramagnetico , diamagnetico) .
Osserviamo che la corrente di magnetizzazione all'interno di un mezzo magnetizzabile è assente se il mezzo è omogeneo e non vi sono correnti di conduzione. Infatti in questo caso si ha

$$I' = \oint \vec{M} d\vec{l} = \chi_m \oint \vec{H} d\vec{l} \implies I' = \chi_m I \implies \vec{j}' = \chi_m \vec{j} \implies \vec{j}' = 0 \iff \vec{j} = 0$$

Si studia adesso il comportamento dei vettori $\vec{B}$ e $\vec{H}$ nelle immediate vicinanze della superficie di separazione fra due mezzi magnetici omogenei. Prendendo quindi un cilindro localizzato a cavallo della superficie di separazione si ha , per il teorema di Guass , che le componenti normali del campo magnetico si conservano .
Per quanto riguarda il vettore $\vec{H}$ invece notiamo che la sua componente tangente ha , in generale , una discontinuità nella transizione tra un mezzo e l'altro dovuta alle correnti di conduzione (non di magnetizzazione !) . Riassumendo questi due importanti risultati si ottiene quindi

$$B_{2n} = B_{1n} \ ; \ H_{2t} - H_{1t} = J_{\ell N} \xrightarrow{\vec{j}_\ell = 0} H_{2t} = H_{1t}$$

ove abbiamo indicato con $\vec{J}_\ell$, $J_{\ell N}$ rispettivamente la densità LINEARE di corrente e la sua proiezione sulla normale alla superficie di separazione. Notiamo quindi che il campo B si comporta alla superficie di separazione come il vettore D mentre il vettore H si comporta come il vettore E .
Analogamente a quanto già illustrato per il campo elettrico le linee del campo magnetico subiscono il fenomeno della rifrazione attraversando la superficie di separazione. Il rapporto tra gli angoli di rifrazione è dato da

$$\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{B_{2t}/\mu_2}{B_{1t}/\mu_1} \xRightarrow{\vec{J}_\ell = 0} \frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Consideriamo ora il calcolo esplicito del campo magnetico per un conduttore in cui fluiscono correnti di conduzione. Se tale conduttore è posto nel vuoto il teorema della circuitazione del vettore magnetizzazione impone che le correnti di magnetizzazione volumetriche e superficiali si compensino a vicenda : in questo modo è necessario conoscere solo quelle di conduzione per determinare il campo. In formule si ha

$$I' = I'_\tau + I'_\Sigma = 0 \implies I'_\tau = -I'_\Sigma$$

Se invece si riempie lo spazio vuoto con un materiale magnetizzabile omogeneo alla superficie di separazione tra questo ed il conduttore appariranno delle correnti superficiali di magnetizzazione. In definitiva saranno quindi presenti correnti di conduzione I , correnti di magnetizzazione volumetriche e superficiali del conduttore che si compensano e infine correnti di magnetizzazione I' sulla superficie del mezzo non conduttore . Il campo magnetico nel mezzo non conduttore allora è determinato dalle sole correnti I ed I'. Allo scopo di calcolare il campo magnetico si prende quindi una linea chiusa orientata attorno al filo ottenendo

$$I' = \oint \vec{J}'_\ell \, d\vec{l} = \oint \vec{M} d\vec{l} = \chi_m \oint \vec{H} d\vec{l} = \chi_m I$$

In ogni punto dunque il campo magnetico generato dalle correnti di magnetizzazione differisce da quello generato dalle correnti di conduzione solo in intensità, essendo

$$\vec{B}' = \chi_m \vec{B}_0$$

Allora il campo totale risulta essere

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = (1 + \chi_m)\vec{B}_0 = \mu_r \vec{B}_0 \implies \vec{H} = \vec{H}_0$$

In conclusione quindi nello spazio riempito con un mezzo magnetico omogeneo non conduttore il campo magnetico totale aumenta di un fattore μ_r . Le sostanze che seguono questi comportamenti teorici sono dette magnetiche e si dividono in sostanze debolmente magnetizzabili (paramagnetiche e diamagnetiche) e sostanze fortemente magnetizzabili (ferromagnetiche) che si distinguono per comportamento e diverso coefficiente χ_m .

17.Induzione magnetica , Legge di Lenz

In seguito a prove sperimentali effettuate da Faraday venne scoperto il fenomeno dell'induzione magnetica : una corrente elettrica (indotta) compare in un circuito chiuso durante una variazione del flusso magnetico che attraversa il circuito stesso. Il manifestarsi di questa corrente segnala che si è generata , nel circuito stesso , una forza elettromotrice che dipende SOLO dal modo in cui il flusso del campo magnetico che attraversa il circuito varia nel tempo. Tale situazione può essere riprodotta muovendo il circuito nel campo magnetico , tenendo fermo il circuito e variando il campo magnetico o eseguendo entrambe le

operazioni contemporaneamente. La direzione della corrente indotta è determinata dalla legge di Lenz ed è diretta in modo tale da contrastare la causa che la genera. Per ricavare quindi la forma matematica della legge di Lenz si procede prima considerando una spira che si muove in un campo magnetico. In questo caso si può calcolare il campo elettrico indotto negli elettroni che attraversano la spira , ricavando poi la sua circuitazione.

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}}{-e} = \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) \implies \mathcal{E} = -B(v\ell) = -B\frac{d\Sigma}{dt} = -\frac{d\Phi_\Sigma(B)}{dt}$$

Nel caso invece in cui il circuito sia immobile in un campo magnetico variabile nel tempo si può procedere considerando che, poiché non può agire più la forza di Lorentz (cariche fisse) , necessariamente si crea un campo elettrico indotto la cui circuitazione porta alla generazione di una forza elettromotrice. Riassumendo quindi un campo magnetico che varia nel tempo genera un campo elettrico. Possiamo quindi scrivere

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_\Sigma(B)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B} d\vec{\Sigma} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{\Sigma}$$

Esprimendo in forma locale questo risultato si ottiene la seconda legge di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Questa legge esprime la condizione locale fra il campo elettrico ed il campo magnetico : la variazione nel tempo del secondo in un punto determina il rotore del campo elettrico nello stesso punto. In questo caso quindi , in accordo con la teoria, il campo elettrico generato non può essere ricondotto ad un potenziale , ovvero è rotazionale.

18.Autoinduzione , Mutua induzione

Se consideriamo una bobina nella quale sia stata indotta una forza elettromotrice. Questa sarà la somma di tutte le f.e.m. indotte in ciascun avvolgimento. Se , poi , il flusso attraverso ogni avvolgimento è lo stesso il flusso totale attraverso la superficie del circuito risulta

$$\Phi = N\Phi_1$$

Questa quantità è chiamata flusso concatenato alla bobina e da luogo ad una f.e.m. indotta pari a

$$\mathcal{E}_i = -N\frac{d\Phi_1}{dt}$$

Se invece un conduttore è percorso da corrente variabile , anche il campo magnetico generato da questa varierà nel tempo : ciò produrrà una variazione del flusso concatenato al circuito stesso , e di conseguenza , comparirà una forza elettromotrice. Questo fenomeno è noto sotto la definizione di autoinduzione. Il flusso del campo magnetico generato dalla corrente è legato a questa tramite la formula

$$\Phi(B) = LI$$

dove L è l'induttanza del circuito ed è una costante che dipende dalla forma di questo e dalle proprietà magnetiche del mezzo dove si trova il circuito. La f.e.m. associata alla variazione di questo flusso è data ovviamente da

$$\mathcal{E}_{ai} = -\frac{d}{dt}LI = -L\frac{dI}{dt}$$

Questa relazione vale nel caso in cui l'induttanza sia costante.
Se si accostano due corpi in cui scorre corrente , come due spire rigide , gli effetti dovuti all'induzione magnetica saranno ben visibili su entrambi i corpi : il flusso magnetico generato su un copro genererà una fem indotta nell'altro e viceversa. Se consideriamo due spire si avrà che i flussi del campo magnetico saranno dati rispettivamente e in maniera simmetrica da

$$\Phi_2 = L_{21}I_1 \ ; \ \Phi_1 = L_{12}I_2$$

Si può dimostrare e verificare sperimentalmente che in assenza di ferro magneti i coefficienti di mutua induzione sono uguali , ovvero $L_{21} = L_{12}$. Si può quindi parlare di mutua induttanza tra le due spire.

19.Energia del campo magnetico

Determiniamo dapprima l'energia magnetica associata ad una corrente. Se consideriamo un'induttanza in cui scorre corrente , inserita in un circuito costituito da un generatore di f.e.m. ed una resistenza possiamo ricavare dall'equazione di maglia quella del bilancio energetico. Infatti si ha, moltiplicando per I ed integrando successivamente tra due istanti generici :

$$RI = \mathcal{E} - L\frac{dI}{dt} \Longrightarrow RI^2 = \mathcal{E}I - LI\frac{dI}{dt} \Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} RI^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}I \ dt - L\int_{t_1}^{t_2} I \ dI$$

In questa relazione possiamo riconoscere immediatamente che il lavoro compiuto dal generatore $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}I \ dt$ si ripartisce in calore dissipato come effetto Joule e in un termine che possiamo identificare come energia magnetica , intrinseca alla corrente.
Si ha quindi

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L}$$

Questa formula è estendibile anche al caso più generale , considerando l'esempio di un solenoide in cui vale $L = \mu_r\mu_0 n^2\tau \ ; \ nI = H = B/\mu_r\mu_0$. L'energia magnetica in questo caso diventa

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_r\mu_0}\tau = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2}\ \tau$$

La formula , valida quando un campo uniforme riempia il volume τ , è estendibile al caso più generale in cui i campi non siano uniformi. Si può dimostrare che , in generale , l'energia può essere espressa in funzione dei campi B e H attraverso la relazione

$$U_m = \int \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_r\mu_0}\ d\tau = \int \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} d\tau$$

Lo stesso ragionamento può essere esteso al caso di due spire con mutua induzione. Si ha , sfruttando lo stesso ragionamento utilizzato per calcolare l'energia intrinseca della corrente :

$$dU_m = -(\mathcal{E}_{is1} + \mathcal{E}_{i1})I_1 \ dt - (\mathcal{E}_{is2} + \mathcal{E}_{i2})I_2 \ dt = L_1I_1dI_1 + L_{12}I_1dI_2 + L_2I_2dI_2 + L_{21}I_2dI_1$$

$$dU_m = d\left(\frac{1}{2}L_1 I_1^2\right) + d\left(\frac{1}{2}L_2 I_2^2\right) + d(L_{12} I_1 I_2) \Longrightarrow U_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2$$

Si riconosce quindi che , in questo caso , l'energia ha come addendi le energie intrinseche delle due correnti e l'energia mutua delle due correnti. Allo stesso risultato , in forma integrale , si può arrivare considerando la sovrapposizione dei due campi magnetici provocati dalle spire e sostituendo poi nella formula generale dell'energia magnetica.

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2\vec{B}_1\vec{B}_2 \implies U_m = \int \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_r\mu_0}d\tau = \int \frac{1}{2}\frac{B_1^2}{\mu_r\mu_0}d\tau + \int \frac{1}{2}\frac{B_2^2}{\mu_r\mu_0}d\tau + \int \frac{\vec{B}_1\vec{B}_2}{\mu_r\mu_0}d\tau$$

Da questa ultima relazione , confrontata con quella precedente , si ricavano molte importanti conseguenze. Risulta infatti che l'energia delle correnti non è additiva poiché deve essere aggiunto il termine di mutua interazione che è proporzionale al prodotto delle due correnti.

20.Corrente di spostamento

La teoria esposta fino ad ora , le cui basi erano state gettate da Faraday , fu completata da Maxwell che aggiunse ipotesi e riassunse tutti i risultati ottenuti dopo anni di studi e scoperte scientifiche. Una delle idee introdotte da Maxwell fu quella di "densità di corrente spostamento". Questa si ottiene utilizzando la legge di Gauss , insieme all'equazione di continuità della corrente , ed eseguendo una serie di semplici passaggi algebrici.

$$\oint \vec{D}d\vec{\Sigma} = q \implies \begin{cases} \oint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}d\vec{\Sigma} = \frac{\partial q}{\partial t} \\ \oint \vec{J}d\vec{\Sigma} = -\frac{\partial q}{\partial t} \end{cases} \implies \oint \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{\Sigma} = 0$$

Questa equazione è molto simile alla condizione di continuità per correnti continue ma differisce di un termine che viene definito proprio come vettore densità corrente di spostamento : la densità totale di corrente totale risulta essere la somma di questo termine con le correnti di conduzione.

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Longrightarrow \vec{J}_t = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Il teorema sulla circuitazione di H può essere quindi generalizzato utilizzando questa nuova forma per la densità di corrente ottenendo

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = \int \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{\Sigma}$$

In forma locale si avrà, con ovvio significato dei simboli

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

21.Equazioni di Maxwell

Siamo quindi in grado di enunciare le equazioni di Maxwell per i mezzi in quiete. Sono raccolte in un sistema di quattro equazioni alle derivate parziali che costituisce la base dell'elettromagnetismo classico.

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_\Sigma \vec{D}\,d\vec{\Sigma}=\int_\tau \rho\,d\tau \\ \displaystyle\oint_\ell \vec{E}d\vec{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \vec{B}\,d\vec{\Sigma} \\ \displaystyle\int_\Sigma \vec{B}\,d\vec{\Sigma}=0 \\ \displaystyle\oint_\ell \vec{B}d\vec{l}=\mu_0 I+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \vec{E}\,d\vec{\Sigma} \end{cases}$$

Sono state esposte le due diverse forme delle leggi (locale ed integrale) in modo da enfatizzare gli aspetti peculiari di ciascuna delle due. Le due forme , pur esprimendo lo stesso risultato , vanno usate in contesti prettamente diversi. Infatti quelle in forme integrale sono valide per ogni superficie , mentre quelle in forma locale valgono solo in punti in cui non vi siano discontinuità e dove il campo elettrico ed il campo magnetico risultino funzioni a valori vettoriali derivabili.
Le prime due equazioni mostrano le due cause fondamentali che possono generare un campo elettrico :

a) Le sorgenti del campo elettrico possono essere le cariche elettriche , sia quelle "estranee" che quelle legate dall'equazione $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\propto(\rho+\rho')$
b) Il campo elettrico appare anche quando un campo magnetico varia nel tempo

Le seconde invece indicano che il campo magnetico può essere prodotto da cariche in moto (correnti elettriche) , o da campi elettrici variabili , o da entrambe le cause contemporaneamente. Queste equazioni permettono inoltre di ricavare immediatamente il campo elettrico e quello magnetico per integrazione e , insieme all'equazione della forza di Lorentz

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

formano un sistema di equazioni sufficiente per descrivere tutti i fenomeni dell'elettromagnetismo (nel caso non quantistico). Nei materiali le equazioni di Maxwell non formano un sistema di completo di equazioni poiché devono essere completate con le equazioni costitutive , che descrivono le caratteristiche del mezzo. Per mezzi isotropi che non contengano materiali ferroelettrici o ferromagnetici queste equazioni assumono la forma familiare

$$\begin{cases} \vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \\ \vec{B}=\mu_r\mu_0\vec{H} \\ \vec{J}=\sigma\left(\vec{E}+\vec{E}^*\right) \end{cases}$$

In conclusione è fondamentale notare come le equazioni di Maxwell siano lineari , in virtù della presenza di sole derivate prime , e siano soddisfatte in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Bibliografia

- Mazzoldi , Nigro , Voci – Fisica Vol. II
- I.E.Irodov – Basic laws of electromagnetism

Ultima revisione : Gennaio 2010

guidocioni@gmail.com