Formulario Equazioni Differenziali

In questo formulario sono raccolti solamente i più semplici metodi di risoluzione di Equazioni differenziali lineari. Sono stati tralasciate le parti di teoria riguardanti il Wronskiano o teoremi di esistenza per esigenze di sintesi ed è stato preferito raccogliere solo le formule riguardanti problemi comuni nei corsi di Fisica, Matematica ed Ingegneria.

- **Lineari del primo ordine**

$$u'(t) + a(t)u(t) = Q(t) \ , \ \ t \in I$$

$$u(t) = e^{-A(t)} \int A(t)Q(t)dt + Ce^{-A(t)} \ \ ; \ \ A(t) = \int a(t)dt$$

$$u(t) = e^{-A(t)} \left[u_0 + \int_{t_0}^{t} A(t)Q(t)dt \right] \ \ ; \ \ A(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

- **Operatore L**

  L è un operatore lineare di $C^n(I) \to C^0(I)$

$$L(\alpha F + \beta G) = \alpha L(F) + \beta L(G) \ , \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ , \qquad F, G \in C^n(I)$$

- **Teoremi di struttura delle EDL**

  Soluzione dell'omogenea

$$S_0 = \{u \in C^n(I) : \ L(u) = 0\} = Ker(L) \ \ , \dim S_0 = n$$

  Soluzione della non omogenea

$$S_f = \{u \in C^n(I) : \ \ L(u) = f\} = S_0 + u_f$$

- **Lineari di ordine N a coefficienti costanti**

$$\begin{cases} a_n u^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = f(t) \\ a_n \, , a_{n-1} \, , \ldots a_0 \in \mathbb{C} \ \ ; \ \ a_n \neq 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k u_k(t) + u_*(t) \ \ ; \ \ con \, u_*(t) \, soluz. particolare$$

  Per trovare le soluzioni si procede calcolando :

  1. Polinomio caratteristico

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

2. Se la radice è REALE ad ogni radice del polinomio caratteristico con molteplicità m si associano le m funzioni:

$$e^{\lambda_i t}\ ;\ \ te^{\lambda_i t}\ ; \dots \dots ; t^{m-1}e^{\lambda_i t}$$

Se la radice è COMPLESSA ad ogni coppia di radici $\alpha \pm i\beta$ si associano le $2m$ funzioni

$$\begin{cases} e^{\lambda t}\cos \beta t\ ;\ te^{\lambda t}\cos\beta t ; \dots \dots ; t^{m-1}e^{\lambda t}\cos(\beta t) \\ e^{\lambda t}\sin\beta t\ ;\ te^{\lambda t}\sin\beta t ; \dots \dots ; t^{m-1}e^{\lambda t}\sin(\beta t) \end{cases}$$

3. La soluzione particolare si cerca considerando il termine noto della differenziale. Se $f(t)$ è del tipo

$$f(t) = e^{at}P(t)\cos bt \quad\ o \quad f(t) = e^{at}P(t)\sin bt$$

Si cerca una soluzione definita su $\mathbb{R}$ della forma :

$$u_*(t) = t^m e^{at}[Q_1(t)\cos bt + Q_2(t)\sin bt]$$

Ove

$$-\,m \to molteplicità\ di\ (a+ib)\ come\ radice\ del\ pol.caratteristico$$
$$-Q_1(t), Q_2(t)\ generici\ polinomi\ di\ grado\ uguale\ a\ P(t)$$

- **Lineari di ordine N – Metodo di variazione delle costanti arbitrarie**

$$u''(t) + a\,u'(t) + b\,u(t) = f(t)$$

Si definisce la funzione $u_f(t) = u_1(t)\,v_1(t) + u_2(t)\,v_2(t)$, $con\ u_1\ e\ u_2$ soluzioni dell'omogenea. In seguito si risolve il sistema

$$\begin{cases} u_1(t)\,v_1'(t) + u_2(t)\,v_2'(t) = 0 \\ u_1'(t)\,v_1'(t) + u_2'(t)\,v_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

Ricavando $v_1\ e\ v_2$.

- **EDL a variabili separabili**

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)B\big(u(t)\big) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} ,\quad A: I_1 \to \mathbb{R}\ , B: I_2 \to \mathbb{R}\ , \qquad t_0 \in I_1$$

Si procede alla separazione integrando.

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{B\big(u(s)\big)}ds = \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds \implies H\big(u(t)\big) - H(u_0) = A(t) - A(t_0)\ \ primitive$$

- **Riduzione dell'ordine quando è nota una soluzione dell'omogenea**

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = f(t)$$

Se conosco $v(t)$ soluzione dell'omogenea , allora cerchiamo una soluzione del tipo :

$$u(t) = w(t)v(t) \quad \implies \ risolvo\ ed\ integro$$

- **Riduzione dell'ordine se manca il termine N**

$$a_n(t)u^{(n-1)}(t) + a_{n-1}(t)u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)u'(t) = f(t)$$

$$z(t) = u'(t) \implies z'(t) = u''(t) \implies z^{n-1}(t) = u^n(t)$$

- **Teorema fondamentale delle differenziali a variabili separabili**

1. Se u_0 è tale che $B(u_0) = 0 \implies u(t) = u_0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ è $soluzione$.

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)B\big(u(t)\big) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} , \quad A: I_1 \to \mathbb{R} \ , B: I_2 \to \mathbb{R} \ , \qquad t_0 \in I_1$$

2. Se $B(u_0) \neq 0$, $u_0 \in \mathring{I_2}$, $t_0 \in \mathring{I_1}$, $\exists!$ $soluzione$ $u(t) \in C^1$. Se J è il massimo intervallo che soddisfa $u_0 \in \mathring{J} \implies \forall u \in J$, $B(u) \neq 0$, $u: I \to J$

3. Se u_0 è tra due radici di $B\big(u(t)\big)$ allora esiste una ed una sola soluzione definita su I_1

- **Equazioni di Eulero**

$$a_n t^n u^{(n-1)}(t) + a_{n-1} t^{n-1} u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 t\, u'(t) + a_0 u(t) = f(t)$$

Si effettua la seguente sostituzione $t = e^x \implies v(x) = u(e^x)$
Quindi $x = \ln t \implies u(t) = v(\ln t)$.

$$u \ risolve \ la \ I° \ eq. \Leftrightarrow v \ risolve \ la \ II° \ eq.$$