UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltá di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Appunti di Geometria 1

Guido Cioni

Versione del 25 maggio 2012

Indice

1 Nozioni Insiemistiche **5**
1.1 Numeri complessi . . . 8
1.2 Polinomi in $\mathbb{K}$ . . . 9
1.3 Relazioni . . . 10

2 Spazi vettoriali **13**
2.1 Esempi di spazi vettoriali . . . 14
2.1.1 Spazi di polinomi . . . 14
2.1.2 Spazi di funzioni . . . 14
2.2 Matrici . . . 15
2.3 Sottospazi vettoriali . . . 16
2.3.1 Esempi di sottospazi vettoriali . . . 18
2.4 Operazioni con sottospazi . . . 19

3 Applicazioni Lineari **21**
3.0.1 Esempi di applicazioni . . . 21

4 Sistemi Lineari **27**
4.1 Sistema lineare . . . 27
4.2 Matrici a scalini . . . 28
4.3 Algoritmo di Gauss . . . 30

5 Basi e dimensione **35**
5.1 Applicazioni lineari e basi . . . 35
5.2 Proprietá delle basi . . . 37

6 Basi e applicazioni lineari **41**

7 Rango **45**
7.1 Rango . . . 45
7.2 Come trovare una base dello spazio delle soluzioni di $Ax = 0$ . . . 47
7.3 Matrici invertibili e gruppo lineare . . . 47
7.4 Calcolo dell'inversa . . . 50
7.5 Rappresentazione matriciale di una applicazione lineare . . . 50
7.6 Matrice del cambiamento di base . . . 52
7.7 Ulteriore caratterizzazione del rango . . . 53

8 Determinante **55**
8.1 Esistenza ed unicitá del determinante 55
8.1.1 Dimostrazione del teorema (8.1.1) 56
8.2 Proprietá aggiuntive del determinante 57
8.2.1 Calcolo dell'inversa 58
8.3 Risoluzione di sistemi 59

9 Endomorfismi **61**
9.1 Calcolo di autovalori e autospazi 63
9.2 Conseguenze del teorema di diagonalizzazione 66

10 Forme Bilineari **71**
10.1 Cambiamenti di base 72
10.2 Prodotti scalari 73
10.3 Diagonalizzazione di prodotti scalari 78
10.4 Forme quadratiche reali 80
10.5 Calcolo della segnatura 82
10.6 Spazi euclidei 83
10.6.1 Ricerca di basi ortonormali 85
10.7 Matrici ortogonali 86
10.7.1 Teorema spettrale 87
10.8 Applicazioni ortogonali 88

Capitolo 1

Nozioni Insiemistiche

Gli insiemi sono gli oggetti base con cui lavoreremo. Sono scontate le notazioni $a \in A$, $a \notin A$. Sono quindi immediate le seguenti proprietá

1. $A \subset B : \forall a \in A \ , \ a \in B$;
2. $A = B \Leftrightarrow A \subset B, B \subset A$.

Osservazione 1.

1. $\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali
2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi
3. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ denota l'insieme dei numeri razionali
4. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ denota l'insieme dei numeri reali.

Osservazione 2.
Un insieme si puó definire esplicitando una proprietá rispettata da tutti gli elementi contenuti nello stesso.

$$\{x \in A : \text{proprietá}\} \tag{1.1}$$

Definizione 1.1 (Insiemi composti)**.** Ci sono un insieme di operazioni che , a partire da insiemi, producono nuovi insiemi.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \tag{1.2}$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} \tag{1.3}$$
$$A - B = \{x \in A : x \notin B\} \tag{1.4}$$

Un importante definizione utile é data dalla seguente

Definizione 1.2 (Prodotto cartesiano)**.**

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \tag{1.5}$$

Ovvero definiamo come prodotto cartesiano l'insieme formato dalle coppie ordinate di A e B. Si ponga attenzione alla differenza tra un normale insieme che contiene gli elementi 1,2 e il prodotto cartesiano tra i due. Infatti

$$(1, 2) \neq (2, 1) = \{1, 2\} = \{2, 1\}$$

.

Definizione 1.3 (Sottoinsieme proprio)**.** L'insieme $A \subset B$ é sottoinsieme proprio se $A \neq B$, ossia $\exists b \in B : b \notin A$. Dunque esiste almeno un elemento che sta in B , che peró non sta in A.

A questo punto definiamo gli altri fondamentali oggetti necessari per la nostra trattazione.

Definizione 1.4 (Applicazione)**.** Una applicazione é una terna di oggetti : dominio , codominio ed una legge tali che $A \to B$, e la freccia sta per la legge. Questo significa che $\forall a \in A \to f(a) \in B$. L'applicazione associa quindi uno ed un solo elemento nel codominio : non ci deve essere ambiguitá nella definizione di $f(a)$!

Definizione 1.5 (Immagine)**.** Denoteremo con

$$\mathrm{Imm} f = f(A) = \{b \in B : a \in A : b = f(a)\} \tag{1.6}$$

Seguono quindi una serie di definizioni che riguardano le applicazioni.

Definizione 1.6 (Surgettivitá)**.** $f : A \to B$ si dice surgettiva se $\mathrm{Imm} f = B$ ovvero $\mathrm{Imm} f \subset B$ e $B \subset \mathrm{Imm} f$. Si noti che la prima inclusione é ovvia visto che il codominio di f é proprio B. La proprietá si puó quindi esplicitare come

$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tale che } f(a) = b \tag{1.7}$$

Definizione 1.7 (Iniettivitá)**.** f si dice iniettiva se $\forall (x, y) \in A$ con $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Si noti che, se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Osservazione 3.
Prendiamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $x \to x^2$. Tale funzione non é iniettiva perché $f(1) = f(-1)$. Inoltre non é surgettiva perché $-1 \notin \mathrm{Imm} f \Rightarrow \mathrm{Imm} f \neq \mathbb{R}$

Definizione 1.8 (bigettiva)**.** La funzione $f : A \to B$ si dice bigettiva se é sia iniettiva che surgettiva.

Definizione 1.9 (Restrizione di f)**.** Supponiamo di prendere $f : A \to B$ e $Z \subset A$. L'insieme $f(Z)$ é definita da

$$f(Z) = \{b \in B : \exists x \in Z \text{ tale che } b = f(x)\} \tag{1.8}$$

La restrizione di f a Z é l'applicazione definita da

$$f|_Z : Z \to B \tag{1.9}$$

Questa é definita da $\forall x \in Z, f|_Z(x) = f(x)$

Osservazione 4.
Si noti che

$$\mathrm{Imm}(f|_Z) = \{b \in B : \exists x \in Z : b = f(x)\} = f(Z) \tag{1.10}$$

Definizione 1.10 (Controimmagine)**.** Data $f : A \to B$, prendiamo $W \subset B$. Definiamo la controimmagine

$$f^{-1}(W) = \{x \in A : f(x) \in W\} \tag{1.11}$$

Osservazione 5.
Prendiamo l'applicazione giá considerata definita da $f(x) = x^2$. Allora

$$f^{-1}([3, 4]) = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in [3, 4]\right\} = [\sqrt{3}, 2] \cup [-2, -\sqrt{3}] \tag{1.12}$$

Definizione 1.11 (Composizione di applicazioni)**.** Supponiamo di avere $f : A \to B$, $g : B \to C$. Si denota con $(g \circ f)$ una applicazione

$$(g \circ f) : A \to C$$

definita da

$$\forall a \in A, (g \circ f)(a) \equiv g(f(a))$$

Definizione 1.12 (Uguaglianza tra funzioni)**.** Prendiamo $f, g : A \to B$. Diciamo che $f = g$ se $\forall a \in A$ allora $f(a) = g(a)$.

Osservazione 6.
Si noti che $g \circ f \neq f \circ g$ in generale.

Definizione 1.13 (Identitá)**.** Dato un insieme A si definisce l'applicazione identitá come

$$\mathrm{id}_A : A \to A \quad , \quad x \to x \tag{1.13}$$

Definizione 1.14 (Applicazione invertibile)**.** Una applicazione $f : A \to B$ si dice invertibile se $\exists g : B \to A$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Osservazione 7.
Condizione necessaria e sufficiente affinché una applicazione sia invertibile é che questa sia bigettiva. Ovvero f é invertibile $\Leftrightarrow$ f é bigettiva.

Osservazione 8.
Siano $f : A \to B$, $g : B \to C$. Si ha che

$$\mathrm{Imm}(g \circ f) = \mathrm{Imm}\left(g_{\big|\,\mathrm{Imm}f}\right) \tag{1.14}$$

Definizione 1.15 (Operazioni su insiemi)**.** Un'operazione su A é un'applicazione $A \times A \to A$

Osservazione 9.
$\mathbb{R}$ é un insieme ordinato perché $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si puó dire che $a < b$, $a = b$ o $a > b$. Lo stesso insieme é dotato inoltre di una somma e di un prodotto.

In particolare considerando le applicazioni somma , $+$, e prodotto , $\cdot$, si possono definire nuovi oggetti , i campi.

Definizione 1.16 (Campo)**.** Si dice campo una terna $(K, +, \cdot)$, dove K é un insieme non vuoto e $+ : K \times K \to K$, $\cdot : K \times K \to K$ e valgono le seguenti

1 : Associativitá della somma : $\forall a, b, c \in K$ allora $(a + b) + c = a + (b + c)$.

2 : Esistenza dell'elemento neutro per la somma : $\exists$ un elemento di K detto *zero* e denotato con 0 , tale che $\forall a \in K$, $a + 0 = 0 + a = a$.

3 : Esistenza dell'inverso per la somma : $\forall a \in K, \exists a' \in K$ tale che $a + a' = a' + a = 0$. Tale elemento é detto opposto di a e si denota con $-a$.

4 : Commutativitá : $\forall a, b \in K$ allora $a + b = b + a$.

5 : Associativitá : $\forall a, b, c \in K$ allora $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

6 : Esistenza dell'elemento neutro : $\exists$ un elemento di K detto unitá e denotato 1 , tale che $\forall a \in K$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

7 : Distributivitá : $\forall a, b, c \in K$ allora $a \cdot (b+c) = ab+ac$ o , analogamente $(a+b) \cdot c = ac+bc$.

8 : Commutativitá del prodotto : $\forall a, b \in K$ allora $ab = ba$.

9 : Esistenza dell'inverso per il prodotto : $\forall a \in K$, con $a \neq 0$, $\exists a' \in K$ tale che $aa' = a'a = 1$. Tale elemento é detto inverso di a e si indica con a^{-1}.

Osservazione 10.
$\mathbb{Q}$ é un campo; $\mathbb{R}$ é un campo ; $\mathbb{Z}$ non é un campo.

Definizione 1.17 (Anello/Anello commutativo)**.** Definiamo un oggetto che verifica le proprietá (1)-(7) precedenti ANELLO. Se viene verificata anche al (8) allora viene detto ANELLO COMMUTATIVO.

Osservazione 11.
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é un anello commutativo.

1.1 Numeri complessi

Sia i tale che $\mathrm{i}^2 = -1$. Definiamo lo spazio dei numeri complessi $\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b : a, b \in \mathbb{R}\}$. Quindi se $z \in \mathbb{C}$ allora $z = a + \mathrm{i}b$ con $a = \Re(z)$ e $b = \Im(z)$.

Definizione 1.18 (Relazione di uguaglianza tra complessi)**.**

$$a + \mathrm{i}b = c + \mathrm{i}d \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Osservazione 12.
Definiamo un'applicazione $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ definita da $z = a + \mathrm{i}b \to (a, b)$ che associa ad ogni numero complesso la coppia di numeri a, b. Si noti che φ é iniettiva e surgettiva perché $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exists z \in \mathbb{C}$ tale che $\varphi(z) = (a, b)$.

Definizione 1.19 (Operazioni su numeri complessi)**.** Definiamo una somma su $\mathbb{C}$,

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

definita da

$$(z, w) \to z + w \equiv (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$$

con $z = a + \mathrm{i}b$ e $w = c + \mathrm{i}d$. Definiamo inoltre un prodotto

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

definito da

$$(z, w) \to (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$$

Definizione 1.20 (Coniugio)**.** L'applicazione coniugio $\bar{}$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é definita da $z = a + \mathrm{i}b \to \bar{z} = a - \mathrm{i}b$. Si osservi che $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ e che $z\bar{z} = |z|^2$.

1.2 Polinomi in $\mathbb{K}$

Definiamo lo spazio dei polinomi nel campo $\mathbb{K}$.

$$\mathbb{K}[x] = \{ \text{ polinomi in } x \text{ a coefficienti in } \mathbb{K}\} \tag{1.15}$$

Ovvero

$$\mathbb{K}[x] \ni p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{1.16}$$

Definizione 1.21 (Grado di p)**.** Sia $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, $p(x) \neq 0$. Definiremo il grado di p come

$$\deg(p(x)) = \max\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\} \tag{1.17}$$

Con questa definizione risulta immediato osservare che

$$\deg(0) = -1(\text{oppure} - \infty) \quad ; \quad \deg(p(x)) \leq n \tag{1.18}$$

Definizione 1.22 (Somma su polinomi)**.** Definiamo una somma $+ : \mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ che associa ad una coppia di polinomi (p, q) la loro somma $p + q$. Questa si puó definire come

$$\begin{cases} p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \end{cases} \quad (p+q)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i \tag{1.19}$$

Definizione 1.23 (Prodotto su polinomi)**.** Analogamente si definisce un prodotto $\cdot : \mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ che associa ad ogni coppia di polinomi (p, q) il suo prodotto pq. Per trovare la definizione formale possiamo pensare al prodotto usuale tra polinomi , ricordando peró che stiamo definendo il prodotto in questo modo (non é detto che sia l'unico!).

$$\begin{cases} p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ q = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i \end{cases} \quad \Rightarrow (pq)(x) = \sum_{i=0}^{n+k} c_i x^i \quad \text{dove } c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \tag{1.20}$$

Osservazione 13.
Supponiamo di voler trovare l'inverso del polinomio x . Bisogna quindi trovare $q(x)$ tale che $xq(x) = 1$, ma $\deg(xq(x)) \geq 1$. Si nota quindi che gli unici polinomi invertibili sono quelli di grado 0, altrimenti la relazione scritta prima non é verificata. Dunque $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ é un anello commutativo.

Definizione 1.24 (Radice di un polinomio)**.** Si dice che a é radice di $p(x) \Leftrightarrow p(a) = 0$

Teorema 1.2.1 (di divisione)**.**
$\forall a, b \in \mathbb{K}[x], b \neq 0$, $\exists_{no}$ unici q(quoziente),r(resto)$\in \mathbb{K}[x]$ tali che

$$\begin{cases} a = bq + r \\ \deg r < \deg b \end{cases} \tag{1.21}$$

Osservazione 14.
Se $r = 0$ allora $b|a$, ovvero b divide a.

Teorema 1.2.2 (di Ruffini)**.**
$p(x) \in \mathbb{K}[x]$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Se $p(\alpha) = 0$ allora $(x - \alpha)|p$, ovvero $(x - \alpha)$ divide p.

Dimostrazione. Per il teorema di divisione esistono $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tali che

$$\begin{cases} p(x) = (x-\alpha)q(x) + r(x) \\ \deg r(x) < 1 = \deg(x-\alpha) \Rightarrow r(x) \text{ é costante} \end{cases} \tag{1.22}$$

Resta quindi da dimostrare che $r = 0$. Utilizzo il fatto che α é radice , quindi $p(\alpha) = (\alpha-\alpha)\cdot q(x) + r = 0 + r \Rightarrow r = 0$ □

Proposizione 1.2.3. *Se $p(\alpha) = 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $p(x) = (x-\alpha)^m q(x)$ con $q(\alpha) \neq 0$.*

Definizione 1.25 (Molteplicitá algebrica)**.** L'intero m é detto molteplicitá algebrica (μ_a) della radice α.

Osservazione 15.
Se $p(x) = (x-\alpha)^2 q(x)$ allora $\mu_a(\alpha) \geq 2$

Osservazione 16.
I polinomi possono essere scomposti in polinomi di grado minore , ad esempio $(x^2 - 2) = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$. Ovviamente la nozione di scomposizione dipende dal campo su cui si fanno i calcoli : la scomposizione precedente ha senso solo su $\mathbb{R}$ e non su $\mathbb{Q}$. Dunque

- $x^2 - 2$ é irriducibile in $\mathbb{Q}$.
- $x^2 + 1$ é irriducibile in $\mathbb{R}$.

Osservazione 17.

1. I polinomi di grado 1 sono irriducibili.
2. $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ é irriducibile in $\mathbb{R} \Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0$.

Teorema 1.2.4 (fondamentale dell'algebra)**.** *Ogni polinomio in $\mathbb{C}[x]$ non costante ha almeno una radice.*

1.3 Relazioni

Definizione 1.26 (Relazioni)**.** Una relazione su A é un sottoinsieme , R , di $A \times A$. Se $(a, b) \in R$ scrivo aRb , ovvero a é in relazione con b.

Osservazione 18.
Prendiamo come $A = \{$rette del piano $\}$ e $r, s \in A$. Una relazione possibile puó essere il parallelismo visto che $rRs \Leftrightarrow r \parallel s$.

Definizione 1.27 (Relazione di equivalenza)**.** Una relazione R si dice relazione di equivalenza se

Proprietá riflessiva : $\forall a \in A$, aRa.

Proprietá simmetrica : $aRb \Rightarrow bRa$.

Proprietá transitiva : $aRb, bRc \Rightarrow aRc$

Osservazione 19.
Il parallelismo é una relazione di equivalenza.

Definizione 1.28 (Classe e rappresentante)**.** Sia R relazione di equivalenza. $\forall a \in A$, $[a] = \{b \in A : bRa\}$ é detta classe di a. Ogni $b \in [a]$ si dice rappresentante di $[a]$.

Definizione 1.29 (Insieme quoziente)**.** Viene definito come insieme quoziente l'insieme

$$A/R = \{[a] : a \in A\} \tag{1.23}$$

dove R é una relazione.

Definizione 1.30 (Proiezione sull'insieme quoziente)**.** Possiamo definire un'applicazione proiezione al quoziente $\pi : A \to A/R$ che agisce come $a \to [a]$ ed é surgettiva perché $a \in [a]$ ma in generale non é iniettiva.

Proposizione 1.3.1.

1. $[a] = [b] \Leftrightarrow aRb$

2. Se $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

Dimostrazione. (1) $(\Rightarrow) a \in [a] = [b]$, quindi $a \in [b]$ e quindi aRb. $(\Leftarrow)$ Devo provare che entrambi gli insiemi sono contenuti nell'altro. Provo che $[a] \subset [b]$, cioé che $\forall x \in [a]$, $x \in [b]$. Ma se $x \in [a]$ allora xRa e per ipotesi aRb , dunque per la transitivitá xRb , $x \in [b]$. L'altra inclusione é analoga.
(2) Per assurdo supponiamo che esista $x \in [a] \cap [b]$, cioé xRa , xRb , ovvero aRb che significa , per il punto (1) , $[a] = [b]$, che contraddice la tesi. □

Definizione 1.31 (Unione)**.** $\forall a \in A$, $a \in [a]$, $A = \cup_{a \in A}[a]$. Inoltre , per la proposizione precedente , le classi di equivalenza o coincidono o sono completamente disgiunte.

Capitolo 2

Spazi vettoriali

Definizione 2.1 (Prodotto cartesiano di campi)**.** Se $\mathbb{K}$ campo definiamo con la notazione $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\}$ il prodotto cartesiano di n campi $\mathbb{K}$.

Cerchiamo di definire anche una somma su $\mathbb{K}^n$.

Definizione 2.2 (Somma su campi)**.**

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \quad , (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \equiv (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \tag{2.1}$$

Definiamo anche un

Definizione 2.3 (Prodotto per scalari su campi)**.**

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \quad , \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \alpha(x_1, \dots, x_n) \equiv (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \tag{2.2}$$

Le proprietá viste prima ci permettono di definire una nuova struttura

Definizione 2.4 (Campo vettoriale)**.** Si dice campo vettoriale un insieme V con $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$,$V \neq \emptyset$, su un campo $\mathbb{K}$ se valgono le proprietá seguenti. Sia $x \equiv (x_1, \dots, x_n)$:

1. Associativitá della somma
2. Esistenza elemento neutro per la somma
3. Esistenza inverso per la somma
4. Commutativitá per la somma
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$ allora $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
7. $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in \mathbb{K}^n$ allora $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
8. $\forall x \in \mathbb{K}^n$ allora $1 \cdot x = x$.

Osservazione 20.
$(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{C})$ é uno spazio vettoriale.
$(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{R})$ é uno spazio vettoriale diverso dal precedente.

2.1 Esempi di spazi vettoriali

2.1.1 Spazi di polinomi

Prendiamo $\mathbb{K}$ campo e $\mathbb{K}[x] = \{\text{polinomi a coefficienti in } \mathbb{K}\}$. Abbiamo giá visto che su questo insieme é definita la somma ed il prodotto per scalari. Questo é uno spazio vettoriale.

2.1.2 Spazi di funzioni

Supponiamo V spazio vettoriale e A insieme. Definiamo

$$\mathscr{F} = \{f : A \to V\} \tag{2.3}$$

tutte le funzioni da A a V. Definiamo la somma

$$\begin{gathered} + : \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F} \\ (f, g) \to f + g : A \to V \end{gathered} \tag{2.4}$$

Dobbiamo anche definire l'operazione di valutazione sulla somma

$$(f + g)(a) \equiv f(a) + g(a), \forall a \in A \tag{2.5}$$

che é lecita visto che $f(a)$ e $g(a)$ sono elementi di V. Devo definire il prodotto per scalare

$$\begin{gathered} \cdot : \mathbb{K} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F} \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathscr{F}, \alpha f : A \to V \end{gathered} \tag{2.6}$$

e l'operazione di valutazione sul prodotto per scalari

$$\forall a \in A(\alpha f)(a) \equiv \alpha \cdot f(a) \tag{2.7}$$

Si puó verificare ora che $(\mathscr{F}, +, \cdot, \mathbb{K})$ é uno spazio vettoriale. Valgono le proprietá seguenti

- $\forall f, g, h \in \mathscr{F}$ mi chiedo se $(f + g) + h = f + (g + h)$, cioé $\forall a \in A$, $[(f + g) + h](a) = [f + (g + h)](a)$é un'uguaglianza in V.

  $$\begin{aligned} [(f + g) + h](a) = (f + g)(a) + h(a) = (f(a) + g(a)) + h(a) = \\ f(a) + (g(a) + h(a)) = f(a) + (g + h)(a) = [f + (g + h)](a) \end{aligned} \tag{2.8}$$

  dove abbiamo usato la definizione di somma tra funzioni e l'associativitá su V.

- $\forall f \in \mathscr{F}$, $f + 0 = f$, dove 0 é l'applicazione nulla $0 : A \to V$ definita da $\forall a \in A, 0(a) \equiv 0_V$. Inoltre vale che

  $$\forall a \in A, (f + 0)(a) = f(a)$$

  infatti

  $$(f + 0)(a) = f(a) + 0(a) = f(a) + 0_V = f(a)$$

2.2 Matrici

La matrice é una tabella di numeri organizzata in righe e colonne. Denotiamo con $M(p,q,\mathbb{K}) = \{$matrici $p \times q$ a coefficienti in $\mathbb{K}\}$

Definizione 2.5. Sia $A \in M(p,q,\mathbb{K})$. Allora A_i =riga $i-$esima ; A^i =colonna $i-$esima. $[A]_{ij}$=elemento di posto ij.

Devo definire una somma ed un prodotto per scalare

Definizione 2.6 (Somma tra matrici)**.**

$$+ : M(p,q) \times M(p,q) \to M(p,q) \quad ; \quad (A,B) \to A+B \tag{2.9}$$

definita da

$$\forall i = 1,\dots,p; \forall j = 1,\dots,q, [A+B]_{ij} \equiv [A]_{ij} + [B]_{ij} \tag{2.10}$$

Definizione 2.7 (Prodotto per scalari)**.**

$$\cdot : \mathbb{K} \times M(p,q) \to M(p,q) \quad ; \quad (\alpha, A) \to \alpha A \tag{2.11}$$

definito da

$$\alpha[A]_{ij} \equiv [\alpha A]_{ij}$$

Introduciamo il concetto di

Definizione 2.8 (Uguaglianza tra matrici)**.** Diciamo che $A = B$ se

$$\forall i,j \quad [A]_{ij} = [B]_{ij}$$

e verifichiamo se lo spazio delle matrici é uno spazio vettoriale.

- $0 \in M(p,q)$ é definita da , $\forall i,j : [0]_{ij} = 0$.
- $\forall A \in M(p,q)$ bisogna verificare che $A + 0 = A$. Ma

$$[A+0]_{ij} = [A]_{ij} + [0]_{ij} = [A]_{ij} + 0_{\mathbb{K}} = [A]_{ij}$$

Osservazione 21.
Sia

$$v_O^2 = \{ \text{ vettori del piano applicati in } O\} \tag{2.12}$$

Su questo insieme si puó definire una somma (regola del parallelogramma) data da $+ : v_O^2 \times v_O^2 \to v_O^2$ che somma $\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}$. Analogamente si puó definire un prodotto $\cdot : \mathbb{R} \times v_O^2 \to v_O^2$ che produce $(\alpha, \vec{OP}) \to \alpha\vec{OP}$. Lo spazio v_O^2 , dotato di questo prodotto e di questa somma é uno spazio vettoriale.

Definizione 2.9 (Vettori colonna)**.** Si consideri l'insieme delle matrici $p \times q$, $M(p,q,\mathbb{K})$. Lo spazio dei vettori colonna é definito da

$$M(p,1,\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{K} \right\} \tag{2.13}$$

Osservazione 22.
L'applicazione $\mathbb{K}^p \to M(p,1)$ é biunivoca , quindi si possono usare entrambe le notazioni

$$(x_1, \ldots, x_p) \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Osservazione 23.
La traslazione di $\vec{OP}$ su v_O^2 si definisce come $\tau_{\vec{OP}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e porta il punto Q in R con la condizione che $\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ}$.

Proposizione 2.2.1. *Per gli spazi vettoriali valgono le seguenti proprietá.*

1. *Il vettore* $\vec{0}$ *é unico.*
2. $\forall x \in V$, $0 \cdot x = 0$.
3. $\forall x \in V$, $\exists!$ *opposto.*
4. $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$
5. *Se* $\alpha x = 0$ *allora* $\alpha = 0$ *oppure* $x = 0$.
6. $\forall x \in V$, $(-1)x = (-x)$

Dimostrazione. (1) Supponiamo per assurdo che esistano 0_1 , 0_2 elementi neutri per la somma $+$. Visto che 0_2 é neutro per la somma si avrá che $0_1 = 0_1 + 0_2$. Ma , per ipotesi, anche 0_1 é elemento neutro per la somma. Quindi $0_1 + 0_2 = 0_2 = 0_1$, dunque $0_1 = 0_2$ e si trova l'assurdo qundi l'elemento neutro é unico.
(6) Osserviamo che

$$(-1)x + x = x(1-1) = 0 \cdot x = 0$$

□

Definizione 2.10 (Tipi di matrici)**.** Presentiamo le diverse classi di matrici

Matrici diagonali Sono il sottospazio $D(n) \subset M(n,n,\mathbb{K})$, tali che $[A]_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

Matrici triangolari Sono il sottospazio $T(n) \subset M(n,n,\mathbb{K})$ tali che $[A]_{ij} = 0, \forall i > j$ (triangolari superiori).

Matrici simmetriche Sono il sottospazio $S(n) \subset M(n,n,\mathbb{K})$ tali che $[A]_{ij} = [A]_{ji}, \forall i,j$

Matrici antisimmetriche Sono il sottospazio $A(n) \subset M(n,n,\mathbb{K})$ tali che $[A]_{ij} = -[A]_{ji}, \forall i,j$.

2.3 Sottospazi vettoriali

Definizione 2.11 (Sottospazio vettoriale)**.** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. $W \subset V$ si dice sottospazio vettoriale di V se[1]

1. $0_V \in W$, ovvero W é non vuoto .

[1]Con la notazione 0_V si intende lo zero relativo allo spazio vettoriale V, diverso dall'elemento neutro per la somma!

2. $\forall x, y \in W$, $x + y \in W$ ovvero si definisce $+|_{W\times W} : W \times W \to W$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in W, \alpha x \in W$ ovvero si definisce $\cdot|_{\mathbb{K}\times W} : \mathbb{K} \times W \to W$.

Quindi se W é ssv di V , W con l'operazione si somma e prodotto ristretti é uno spazio vettoriale indicato dalla terna

$$(+|_{W\times W}, \cdot|_{\mathbb{K}\times W}, W)$$

Osservazione 24.
Gli spazi definiti prima sono tutti sottospazi vettoriali. Controlliamo la chiusura per somma nel caso delle matrici simmetriche. Prendiamo quindi $A, B \in S(n)$, per cui vale $[A]_{ij} = [A]_{ji}$ e $[B]_{ij} = [B]_{ji}, \forall i, j$. Bisogna verificare

$$[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} = [A]_{ji} + [B]_{ji} = [A + B]_{ji} \tag{2.15}$$

Osservazione 25.

1. $\{0\}$ e V sono sottospazi vettoriali di V.
2. Nel caso $V = \mathbb{R}^2$:
   (a) Le rette per l'origine sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$.
   (b) L'unione dei semipiani $\{x \geq 0, y \geq 0\} \cup \{x \leq 0, y \leq 0\}$ non é un sottospazio vettoriale.
   (c) L'unione di due rette per l'origine non é uno sottospazio vettoriale.
3. $\mathbb{K}[x]$, $\mathbb{K}_m[x] = \{p \in \mathbb{K}[x] : \deg p \leq m, m \in \mathbb{N}\}$ é un sottospazio vettoriale. Infatti $\forall p, q \in \mathbb{K}_m[x] \Rightarrow p + q \in \mathbb{K}_m[x]$.

Definizione 2.12 (Combinazione lineare)**.** Siano $v_1 \dots v_n \in V$ e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ con V ssv.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \in V \tag{2.16}$$

si dice combinazione lineare dei v_i a coefficienti a_i. Denotiamo con $\text{Span}(v_1 \dots v_n)$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1 \dots v_n$.

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n : a_i \in \mathbb{K}\}$$

Proposizione 2.3.1. *$\text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ é un ssv di V che contiene $v_1, \dots, v_n$ ed in particolare é il piú piccolo ssv di V che contiene $v_1, \dots, v_n$.*

Dimostrazione. Iniziamo col mostrare che é un sottospazio vettoriale.

1. $0 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$, infatti basta scegliere $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.
2. $\forall x, y \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ devo mostrare che $x + y \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$. Poiché $x \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$, esistono $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $x = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$. Inoltre $y \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ quindi esistono $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tali che $y = b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n$. Quindi

$$(x + y) = (a_1 + b_1)v_1 + \ldots + (a_n + b_n)v_n \equiv \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in V$$

3. La stessa cosa vale per il prodotto per scalari.

Il sottospazio contiene $v_1, \ldots, v_n$ infatti $v_i \in \text{Span}(v_1, \ldots, v_n)$ in quanto basta prendere $a_j = 0, \forall j \neq i$. Per dimostrare l'ultima parte della proposizione bisogna dimostrare che , se Z é un ssv di V che contiene $v_1, \ldots, v_n$ allora $Z \supset \text{Span}(v_1, \ldots, v_n)$. Devo mostrare quindi che $\forall x \in \text{Span}(v_1, \ldots, v_n)$ allora $x \in Z$. Ma se $x \in \text{Span}(v_1, \ldots, v_n)$ esistono $a_1, \ldots, a_n$ tali che $x = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$. D'altra parte $a_1 v_1 \in Z$ visto che Z é un ssv : questo vale $\forall i$ quindi $a_i v_i \in Z$, ovvero $\sum_i a_i v_i \in Z$, $\Rightarrow x \in Z$. □

Definizione 2.13 (Generatori)**.** Denotiamo con $\text{Span}(v_1, \ldots, v_n)$ il sottospazio generato da $v_1, \ldots, v_n$. I vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono i generatori del sottospazio.

Osservazione 26.
Il sottospazio generato da $\text{Span}v_1 = \{av_1, a \in \mathbb{R}\}$ é una retta. Dunque $\text{Span}(v_1, v_2) \subseteq \mathbb{R}^2$

Definizione 2.14 (Span per insiemi)**.** Sia $A \subset V$, allora

$$\text{Span}A = \{\text{comb. lineari finite dei vettori di} A\} \tag{2.17}$$

Teorema 2.3.2. $\text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ *coincide con* $\text{Span}\{v_2, \ldots, v_k\} \Leftrightarrow v_1$ *é combinazione lineare dei* $(v_2, \ldots, v_k)$*.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo che $\text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \text{Span}\{v_2, \ldots, v_k\}$. Ma allora $v_1 \in \text{Span}\{v_2, \ldots, v_k\}$ perché i due spazi sono uguali, quindi $v_1$si scrive come combinazione lineare dei $v_2, \ldots, v_k$.
($\Leftarrow$) Prendo un elemento che sta in $\text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ e voglio dimostrare che sta in $\text{Span}\{v_2, \ldots, v_k\}$. Prendo $v \in \text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\} \Rightarrow v = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^k \alpha_i v_i$. Ma v_1 per ipotesi é combinazione lineare dei $v_2, \ldots, v_k$, quindi

$$v = \alpha_1 \left(\sum_{j=2}^k \beta_j v_j \right) + \sum_{i=2}^k \alpha_i v_i$$

che é una combinazione lineare dei $v_2, \ldots, v_k$, quindi sta anche in $\text{Span}\{v_2, \ldots, v_k\}$. □

2.3.1 Esempi di sottospazi vettoriali

Osservazione 27.
Sia $E = \left\{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^2$, ovvero E rappresenta i punti della parabola nel piano. Si noti che

- 0 sta in questo spazio.
- La somma di due vettori che stanno sulla parabola esce dalla stessa : non é chiuso rispetto alla somma. Per dimostrarlo prendo un elemento $(x, x^2) \in E, (x_1, x_1^2) \in E$. Deve verificarsi $(x, x^2) + (x_1, x_1^2) \in E$ ovvero $(x + x_1, x^2 + x_1^2) \in E \Rightarrow x^2 + x_1^2 = (x + x_1)^2 = x^2 + x_1^2 + 2xx_1$, quindi é un sottospazio vettoriale se e solo se $xx_1 = 0$. Ma si puó sicuramente trovare un contro esempio per cui $xx_1 \neq 0$ (ad esempio $x = 2, x_1 = 3$). Dnque E non un sottospazio vettoriale.

Osservazione 28.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Si noti che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \notin \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} \tag{2.19}$$

visto che non puó essere scritto come combinazione lineare degli altri 3.

- $E = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] : p(1) = 2\}$ non é un ssv perché il polinomio nullo non é contenuto. Diventa sottospazio se si modifica la condizione di appartenenza all'insieme come $p(1) = 0$. In questo caso
  - $0 \in E$
  - $p_1 \in E, p_2 \in E$ allora deve essere $p_1 + p_2 \in E$. Ma $(p_1 + p_2)(1) = p_1(1) + p_2(1) = 0 \in E$.
- $E = \{p(t) \in \mathbb{R}_r[t] : p(2) = 0\}$ é sicuramente un ssv. Il teorema di Ruffini ci dice che possiamo scomporre $p(t) = (t-2)q(t)$ con $\deg q < r$. Prendiamo un'applicazione $h : \mathbb{R}_r[t] \supset E \to \mathbb{R}_{r-1}[t]$ definita da $p(t) = (t-2)q(t) \to q(t)$. Tale applicazione é ben definita perché Ruffini garantisce che q sia unica. É iniettiva perché se prendiamo $p_1 \to (t-2)q_1$, $p_2 \to (t-2)q_2 \Rightarrow p_1 = p_2 \Leftrightarrow q_1 = q_2$. É anche surgettiva.
- Prendiamo

  $$A = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.20}$$

  e

  $$B = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.21}$$

  Si noti che

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

  quindi , i due span coincidono.

2.4 Operazioni con sottospazi

Proposizione 2.4.1. *Siano A, B ssv di V*

1. *$A \cap B$ é un ssv di V.*
2. *$A \cup B$ non é in generale un ssv di V.*

Dimostrazione. (1) Prendiamo $x, y \in A \cap B$,dobbiamo mostrare che $x + y \in A \cap B$. Ma $x + y \in A$ visto che $x \in A$, $y \in A$ e A é ssv di V. Lo stesso vale per $x + y \in B$.
(2) Basta prendere l'unione di due rette distinte per l'origine. □

Definizione 2.15 (Somma di sottospazi)**.** Siano A, B ssv di V. Si definisce il sottospazio somma

$$A + B = \{v \in V : \exists a \in A, \exists b \in B : v = a + b\} \tag{2.23}$$

Si noti che

1. $A \subset A + B$, infatti $\forall a \in A, a = a + 0, 0 \in B$
2. $B \subset A + B$

Proposizione 2.4.2. *$A + B$ é ssv di V , contiene A e B ed é il piú piccolo ssv di V che contiene A e B.*

Definizione 2.16 (Somma diretta)**.** Se $A \cap B = \{0\}$, il sottospazio $A + B$ viene denotato con $A \oplus B$ e viene definito come somma diretta.

Osservazione 29.
Prendiamo un piano A e una retta B che si incontrano solo nello zero. Si noti che $A \oplus B = \mathbb{R}^3$ perché é il piú piccolo ssv che contiene entrambi.

Proposizione 2.4.3 (Unicitá della presentazione)**.** *Ogni vettore $v \in A \oplus B$ si scrive in modo unico come $v = a + b$ con $a \in A, b \in B$.*

Dimostrazione. Devo dimostrare che , se ci fossero due modi di scrivere v , allora questi coinciderebbero. Supponiamo quindi che $v = a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ con $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$. Devo provare che $a_1 = a_2, b_1 = b_2$. Si ha che $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$: ma $a_1 - a_2 \in A$ visto che é somma di vettori di un ssv; lo stesso vale per $b_2 - b_1 \in B$. Dunque $a_1 - a_2 = b_2 - b_1 \in A \cap B = \{0\}$ per l'ipotesi di somma diretta. Dunque $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$. $\square$

Corollario 2.4.4. *Se $V = A \oplus B$ allora $\forall v \in V$, $\exists! a \in A, \exists! b \in B$ tale che $v = a + b$.*

Definizione 2.17 (Proiezione)**.** Posso definire una proiezione su A , $\mathrm{pr}_A : V \to A$ che manda $v \to a$ e una proiezione in B , $\mathrm{pr}_B : V \to B$ che manda $v \to b$.

Osservazione 30.
Si noti che le proiezioni sono ben definite solo perché A e B sono in somma diretta altrimenti ci sarebbe ambiguitá nella definizione.

Definizione 2.18 (Supplementare)**.** Sia U un ssv di V. Un sottospazio W di V si dice supplementare di U se $V = U \oplus W$.

Osservazione 31.
Se $V = \mathbb{R}^2$ e prendo U come retta per l'origine possiamo prendere come supplementare un'altra retta che passa per l'origine. Questi due sottospazi hanno intersezione solo nello 0 quindi sono supplementari. La somma fa tutto $\mathbb{R}^2$. Si noti che in questo caso il supplementare non é unico!

Osservazione 32.

$$M(n) = S(n) \oplus A(n)$$

Capitolo 3

Applicazioni Lineari

Definizione 3.1 (Applicazioni lineari)**.** Siano $V, W\mathbb{K}-$spazi vettoriali. Un'applicazione $f : V \to W$ é detta lineare se

1. $\forall x, y \in V \ , \ f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in V \ , \ f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

ovvero $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Osservazione 33.
Se f é lineare allora $f(0) = 0$, infatti

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

3.0.1 Esempi di applicazioni

1. $0 : V \to W$ é l'applicazione nulla ed é lineare.
2. $\mathrm{id} : V \to V$ é l'identitá ed é lineare.
3. ${}^t : M(p, q) \to M(q, p)$ che manda $A \to {}^t A$, dove $[\,{}^t A]_{ij} = [A]_{ji}$, é l'applicazione trasposta ed é lineare. Infatti
   - ${}^t[A + B]_{ij} = [A + B]_{ji} = [A]_{ji} + [B]_{ji} = {}^t A + {}^t B$
   - ${}^t[\alpha A] = \alpha \ {}^t A$

   Osservazione 34.
   $\forall A \in M(n, n, \mathbb{K})$, $A + {}^t A$ é simmetrica e $A - {}^t A$ é antisimmetrica. Inoltre ogni matrice A si puó scrivere come somma di una matrice simmetrica ed antisimmetrica , infatti

$$(A + {}^t A) + (A - {}^t A) = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}(A + {}^t A) + \frac{1}{2}(A - {}^t A) \tag{3.1}$$

   Questo prova anche che $M(n) = S(n) \oplus A(n)$ visto che un elemento di $M(n)$ si scrive in modo unico come somma di due elementi dei sottospazi in somma diretta. Verifichiamo che le due scomposizioni di A sono simmetriche ed antisimmetriche.

$${}^t[\frac{1}{2}(A + {}^t A)] = \frac{1}{2} \, {}^t(A + {}^t A) = \frac{1}{2}({}^t A + A) \tag{3.2}$$

   Mentre

$${}^t[\frac{1}{2}(A - {}^t A)] = \frac{1}{2} \, {}^t(A - {}^t A) = \frac{1}{2}({}^t A - A) = -\frac{1}{2}(A - {}^t A) \tag{3.3}$$

4. $\mathrm{Tr} : M(n) \to \mathbb{K}$ é l'applicazione traccia che manda

$$A \to \mathrm{Tr}A = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii}$$

é lineare, infatti

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} [A+B]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} ([A]_{ii} + [B]_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii} + \sum_{i=1}^{n} [B]_{ii} = \mathrm{Tr}A + \mathrm{Tr}B$$

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ é l'applicazione derivata che manda $p(x) \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)$ é lineare.
6. $a \in \mathbb{K}$, $f : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$ che manda $p(x) \to p(a)$ é l'applicazione di valutazione ed é lineare.
7. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che manda $z \to \bar{z}$ é l'applicazione di coniugio che non é lineare.
   - $f(z+w) = \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} = f(z) + f(w)$
   - $f(\alpha z) = \overline{\alpha z} = \bar{\alpha}\bar{z} = \bar{\alpha} f(z)$ Dato che questa non vale $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ l'applicazione non é lineare.

Osservazione 35.
Ogni matrice $A \in M(p,q,\mathbb{K})$ definisce in modo naturale una applicazione lineare $A : \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^p$ nel modo seguente.

Prima ci servono alcune definizioni di base.

Definizione 3.2. Prodotto tra vettori colonna

$$(a_1, \dots, a_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \equiv a_1 b_1 + \ldots + a_q b_q \tag{3.4}$$

Definizione 3.3. Se $A \in M(p,q,\mathbb{K})$ e $x \in \mathbb{K}^q = M(q,1)$ poniamo

$$Ax = \begin{pmatrix} \dots & A_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & A_p & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 x \\ \vdots \\ A_p x \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p \tag{3.5}$$

Osservazione 36.
$Ax = x_1 A^1 + \ldots + x_q A^q$, ovvero il prodotto Ax puó essere visto come combinazione lineare delle colonne di A. Infatti

$$Ax = \begin{pmatrix} A_1 x \\ \vdots \\ A_p x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1q}x_q \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pq}x_q \end{pmatrix} = x_1 A^1 + \ldots + x_q A^q \tag{3.6}$$

per la definizione della somma tra matrici e del prodotto tra vettori colonna.

Proposizione 3.0.5. *Se $A \in M(p,q,\mathbb{K})$ l'applicazione $A : \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^p$ che manda $x \to Ax$ é lineare.*

Dimostrazione. Infatti $\forall x, y \in \mathbb{K}^q$, $A(x+y) = Ax + Ay$. Inoltre $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}^q, A(\alpha x) = \alpha(Ax)$. □

Osservazione 37.
Data una matrice A si definisce immediatamente un'applicazione lineare. Dunque l'immagine di A sará l'immagine dell'applicazione lineare associata ad A.

Osservazione 38.
L'uguaglianza $Ax = x_1 A^1 + \ldots + x_q A^q$ confronta un vettore dell'immagine , Ax , ed una combinazione lineare (span) delle colonne di A. Vogliamo quindi provare che $\mathrm{Imm} A = \mathrm{Span}(A^1, \ldots, A^q)$

Dimostrazione. ($\subset$) Infatti $Ax = x_1 A^1 + \ldots + x_q A^q$ quindi un vettore dell'immagine Ax si puó scrivere come combinazione lineare delle colonne di A, ovvero sta nello span.
($\supset$) Se un vettore sta nello span allora é del tipo $\alpha_1 A^1 + \ldots \alpha_q A^q$. Ma questo vettore é immagine del vettore $\alpha \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$, ovvero $A\alpha$. □

Dunque é vero che

$$\mathrm{Imm} A = \mathrm{Span}(A^1, \ldots, A^q) \equiv \mathscr{C}(A) \tag{3.7}$$

Osservazione 39.
Posto

$$e_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^q \quad \ldots \quad e_q \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^q \tag{3.8}$$

si ha che

$$A(e_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^1 \tag{3.9}$$

...

$$A(e_q) = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^q \tag{3.10}$$

Quindi

$$A = \left(Ae_1 \middle| \ldots \middle| Ae_q \right) = \left(A^1 \middle| \ldots \middle| A^q \right) \tag{3.11}$$

Teorema 3.0.6. *Tutte le applicazioni lineari $\mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^p$ sono indotte da una matrice, ossia $\forall g : \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^p$ lineare esiste una ed una sola matrice $A \in M(p, q, \mathbb{K})$ tale che $g(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{K}^q$.*

Dimostrazione. L'unico modo possibile per soddisfare l'uguaglianza $g(x) = Ax$ é che le colonne delle matrici siano uguali, ovvero che le due immagini coincidano. Ma le colonne di A sono immagini dei vettori $e_1, \ldots, e_q$, quindi

$$A = \left(g(e_1) \middle| \ldots \middle| g(e_q) \right) \tag{3.12}$$

Verifichiamo che con tale scelta $g(x) = Ax, \forall x$. Infatti $\forall x \in \mathbb{K}^q$,

$$\begin{aligned} Ax &= x_1 g(e_1) + \ldots + x_q g(e_q) = g(x_1 e_1) + \ldots + g(x_q e_q) = \\ &= g(x_1 e_1 + \ldots + x_q e_q) = g(x_1, \ldots, x_q) = g(x) \end{aligned} \tag{3.13}$$

per la linearitá di g. □

Osservazione 40.
Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $(x, y) \to (2x, x - y, x + 4y)$. Questa applicazione é indotta dalla matrice

$$A = \left(g(e_1) \middle| g(e_2) \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Osservazione 41.
$\hom(V, W) = \{f : V \to W : f \text{ lineare } \}$ é un sottospazio vettoriale di $\{f : V \to W\}$.

- 0 é lineare dunque $0 \in \hom(V, W)$
- Prese $f, g \in \hom(V, W)$ deve essere $(f + g) \in \hom(V, W)$. Si deve quindi verificare

$$\begin{aligned} (f + g)(x + y) &= f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) \\ &= (f + g)(x) + (f + g)(y) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Definizione 3.4 (Nucleo di f)**.** Sia $f : V \to W$ lineare. Si definisce

$$\ker f = \{x \in V : f(x) = 0\} \tag{3.16}$$

come nucleo di f.

Osservazione 42.
Si noti che

- il nucleo non puó essere mai vuoto perché , per la linearitá di f , $f(0) = 0$.
- $\ker f \subset V$

Proposizione 3.0.7. *Se $f : V \to W$ é lineare allora*

1. $\ker f$ *é un ssv di V.*
2. $\mathrm{Imm} f$ *é un ssv di W.*
3. f *é iniettiva se e solo se* $\ker f = \{0\}$

Dimostrazione. .

1. Mostriamo le tre proprietá
   - $0 \in \ker(f)$ poiché $f(0) = 0$
   - $\forall x, y \in \ker(f) \Rightarrow (x + y) \in \ker(f)$ infatti $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$.
   - $\forall x \in \ker(f), \forall \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha x \in \ker(f)$ infatti $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$.
2. Mostriamo le tre proprietá
   - $0 \in \mathrm{Imm}(f)$ poiché $f(0) = 0$.
   - $\forall z, w \in \mathrm{Imm}(f) \exists x, y \in V$ tale che $z = f(x), w = f(y) \Rightarrow z + w = f(x) + f(y) \Rightarrow f(x + y) = z + w \Rightarrow z + w \in \mathrm{Imm}(f)$.
   - $\forall z \in \mathrm{Imm}(f) \quad \exists x \in V$ tale che $z = f(x) \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha z = \alpha f(x) = f(\alpha x) \Rightarrow \alpha z \in \mathrm{Imm}(f)$.
3. $(\Rightarrow)$ Prendiamo una $x \in \ker f$ allora $f(x) = 0 = f(0)$ dunque per l'iniettivitá $x = 0$.
   $(\Leftarrow)$ Se $f(x) = f(y)$ allora devo dimostrare $x = y$. Ma $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow f(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y) \in \ker f$. Ma poiché $\ker f = \{0\} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

$\square$

Capitolo 4

Sistemi Lineari

4.1 Sistema lineare

Definizione 4.1 (Sistema Lineare)**.** Un sistema lineare in p equazioni ed n incognite é dato da

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \tag{4.1}$$

É utile compattare questo sistema in una notazione diversa , utilizzando le matrici.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} \in M(p, n, \mathbb{K}) \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p \tag{4.2}$$

Con questa notazione si nota subito che il sistema si puó scrivere semplicemente con la formula

$$AX = B \tag{4.3}$$

con la nozione di prodotto tra matrici e vettori colonna giá data. Dunque ogni volta che dovremo analizzare un sistema ci ridurremo semplicemente alle matrici associate a questo sistema.

Definizione 4.2 (Matrice completa del sistema)**.** La matrice $A' = (A|B)$, ottenuta aggiungendo alla matrice A la colonna dei termini noti del sistema , é detta matrice completa del sistema.

Osservazione 43.
La n-upla $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ é soluzione del sistema $AX = B \Leftrightarrow AY = B$. Ma sappiamo che la matrice A induce un'applicazione lineare $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ che porta $x \to Ax$. Dunque il sistema é risolubile se e solo se , dato un fissato B questo appartiene all'immagine dell'applicazione A. Le soluzioni del sistema sono invece la controimmagine del vettore B in $\mathbb{K}^n$.

Definizione 4.3. L'insieme delle soluzioni di un qualsiasi sistema si puó scrivere come

$$S_B = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = B\} \tag{4.4}$$

Il sistema con $B = 0$ é detto sistema omogeneo ed il suo insieme di soluzioni é dato da

$$S_0 = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\} \tag{4.5}$$

Osservazione 44.
Si noti che S_0 é un ssv di $\mathbb{K}^n$, infatti

1. $\{0\} \in S_0$ visto che lo 0 é soluzione del sistema omogeneo
2. Dati $x, y \in S_0 \Rightarrow Ax = 0, Ay = 0 \Rightarrow A(x+y) = Ax + Ay = 0 \Rightarrow x + y \in S_0$
3. $\lambda \in \mathbb{K}, x \in S_0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A(\lambda x) = \lambda Ax = 0$

Osservazione 45.
Se $B \neq 0$, S_B non é un sottospazio vettoriale (basti controllare che non contiene lo 0).

Definizione 4.4 (Sistemi equivalenti)**.** Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni

4.2 Matrici a scalini

Definizione 4.5 (Matrice a scalini)**.** Una matrice siffatta

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

é detta a scalini. Piú precisamente $S \in M(p, k)$ si dice a scalini se $\forall i = 1, \ldots, p-1$ tutti gli elementi $[S]_{ij} = 0, \forall j = 1, \ldots, k \Rightarrow [S]_{i+1,h} = 0, h = 1, \ldots, k+1$.

Osservazione 46.
La matrice

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

é a scalini ed ha 2 *pivots*[1]. Possiamo risolvere il sistema riducendosi alle equazioni che lo definiscono

$$\begin{cases} x_3 = -5x_4 - 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -5x_4 - 2 \\ x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{2}x_4 + \frac{7}{2} \end{cases} \tag{4.8}$$

Il sistema delle soluzioni é quindi dato da

$$S_B = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{2}x_4 + \frac{7}{2} \\ x_2 \\ -5x_4 - 2 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 7/2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 11/2 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \tag{4.9}$$

[1] Primo elemento non nullo di una riga a partire da sinistra.

Ovvero l'insieme delle soluzioni del sistema si presenta come la somma di una soluzione particolare e dello span dei vettori di S_0, dato da

$$\left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 11/2 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}(y_1, y_2) \tag{4.10}$$

con $y_1, y_2 \in S_0$.

Proposizione 4.2.1. *Sia $S_0 = \{x : Ax = 0\}$, $S_B = \{x : Ax = B\}$. Sia inoltre $y_0$una soluzione del sistema $Ax = B$. Si ha che $S_B = y_0 + S_0$, dove con la somma si intende che l'insieme $y_0 + S_0$ é dato da $\{y_0 + x : x \in S_0\}$, ovvero si somma ad y_0 tutti i vettori di S_0 , ottenendo un nuovo spazio. Tale insieme ottenuto é il traslato di S_0 e viene detto sottospazio affine.*

Dimostrazione. Proviamo solo l'implicazione $S_B \supset y_0 + S_0$. Un qualsiasi vettore$\in y_0 + S_0$ si scrive come $y_0 + x$, con $x \in S_0$. Devo far vedere che $y_0 + x$ é soluzione del sistema non omogeneo : $A(y_0 + x) = Ay_0 + Ax = B + 0 = B$ □

Proposizione 4.2.2 (Operazioni elementari)**.** *Questa serie di operazioni non cambiano le soluzioni di un sistema.*

1. *Scambio di due equazioni*
2. *Moltiplicazione di una equazione per $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{K}$*
3. *Somma di un multiplo di un'equazione ad un'altra*

Dimostrazione. Proviamo solo la (3) delle precedenti. Prendiamo il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \end{cases} \tag{4.11}$$

e supponiamo che abbia come soluzione $(y_1, \ldots, y_n)$. Preso $h \in \mathbb{K}$, sommo h volte la prima equazione alla seconda ottenendo il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + h(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) = b_2 + hb_1 \end{cases} \tag{4.12}$$

Se si sostituisce $(y_1, \ldots, y_n)$ nel sistema si trova che questo vettore é soluzione anche del sistema modificato. Questo é facile da verificare nella prima equazione, mentre nella seconda si ha

$$\underbrace{a_{21}y_1 + \ldots + a_{2n}y_n}_{b_2} + h\,\underbrace{(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n)}_{b_1} = b_2 + hb_1$$

che é verificato sempre $\forall h$. □

Le operazioni elementari possono essere scritte anche per matrici (data l'equivalenza giá vista tra sistemi e matrici) , basta sostituire al posto di *equazione* il termine *riga.* Presentiamo ora , con un esempio, uno degli algoritmi piú conosciuti per ridurre una qualsiasi matrice a scalini.

Osservazione 47.
Prendiamo il sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 1 \\ 2x - 2y + 5z + t = 3 \\ 4x - 4y + 9z - t = 5 \end{cases} \tag{4.13}$$

Scriviamo la matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 1 & | & 3 \\ 4 & -4 & 9 & -1 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

dove sono state fatte rispettivamente le seguenti operazioni elementari (R_i sta per la riga i-esima) :

1. $R_2 \longmapsto R_2 - 2R_1$
2. $R_3 \longmapsto R_3 - 4R_1$
3. $R_3 \longmapsto R_3 - R_2$

Si osservi che si deve utilizzare sempre la riga con il pivot che viene considerato di volta in volta!

4.3 Algoritmo di Gauss

Proposizione 4.3.1 (Algoritmo di Gauss)**.** *Si consideri la matrice completa del sistema* $(A|B) = D$. *Le operazioni da fare sono*

1. *Prendo la prima colonna da sinistra non nulla in* D. *Dunque* $\exists j_1$ *tale che* $[D]_{j_1,j_2} \neq 0$
2. *A meno di scambiare le righe posso supporre* $i = 1$
3. $\forall i = 2, \dots, p$ *sommando a* D_i *un opportuno multiplo di* D_1 *, posso far si che l'elemento di posto* (i, j_1) *sia 0.*
4. *Itero sulla sottomatrice ottenuta dimenticando la prima riga e la* j_1*-colonna.*

Teorema 4.3.2 (di Gauss)**.**
1. *Ogni matrice puó essere trasformata in una matrice a scalini attraverso un numero finito di operazioni elementari per riga.*
2. *Ogni sistema lineare é equivalente ad un sistema a scalini.*

Proposizione 4.3.3. *Un sistema* $Ax = B$ *é risolubile* $\Leftrightarrow$ *il numero di pivots di* S *é uguale al numero dei pivots di* $(S|C)$ *dove quest'ultima é una ridotta a scalini della matrice completa del sistema.*

Osservazione 48.
Prendiamo il sistema

$$\begin{cases} ax + \dots \\ (a+1)x + \dots \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & \dots & | & \dots \\ a+1 & \dots & | & \dots \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

Per lo studio del numero di pivots si dovrebbero innazitutto distinguere i casi in cui $a = 0$ (1 pivot) oppure $a \neq 0$. Tale distinzione risulta fastidiosa quando si ha a che fare con matrici molto piú grandi. Si puó invece notare che $a + 1 - a$ non dipende da a , quindi conviene sostituire alla seconda riga la differenza tra le due righe in modo da eliminare la dipendenza da a su almeno 1 pivot.

Osservazione 49.
Abbiamo giá visto che le rette per l'origine sono sottospazi vettoriali. In particolare una retta r si puó scrivere come

$$r = \text{Span}(v) = \left\{ t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \tag{4.16}$$

Si voglia ora verificare se un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si trova sulla retta. Si dovrá trovare se $\exists t \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} x = ta \\ y = tb \\ z = tc \end{cases} \tag{4.17}$$

Questo sistema rappresenta un nuovo modo di scrivere una retta in $\mathbb{R}^3$, detta forma paramterica. In questo caso la retta stessa é l'immagine dell'applicazione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ che trasforma $t \to (ta, tb, tc)$, ovvero

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

La matrice associata al sistema (4.17) si scrive come

$$\begin{pmatrix} a & | & x \\ b & | & y \\ c & | & z \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

Dunque $(x, y, z) \in r \Leftrightarrow$ il sistema é risolubile. Posso quindi ridurre a scalini ,supponendo $a, b, c \neq 0$ (altrimenti la soluzione avrebbe poco senso!) , ottenendo

$$\begin{pmatrix} ? & | & * \\ 0 & | & p(x, y, z) \\ 0 & | & q(x, y, z) \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

dove p, q sono generici polinomi di x, y, z. Perché il sistema sia risolubile non ci devono quindi essere pivots , ovvero $p(x, y, z) = q(x, y, z) = 0$, cioé

$$\begin{cases} p(x, y, z) = 0 \\ q(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

ovvero la retta é l'intersezione di due piani , cioé il nucleo di una applicazione lineare.

Osservazione 50.
Prendiamo un piano per l'origine in $\mathbb{R}^3$. Sia

$$H = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t + s \\ 3t + 2s \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\} = \text{Imm}\varphi \tag{4.22}$$

dove $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é l'applicazione definita da

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t \\ t+s \\ 3t+2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

Dunque $(x, y, z) \in H \Leftrightarrow \exists t, s$ tali che

$$\begin{pmatrix} t \\ t+s \\ 3t+2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

Utilizziamo la riduzione a scalini

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 1 & 1 & | & y \\ 3 & 2 & | & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & | & y-x \\ 0 & 2 & | & z-3x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & | & y-x \\ 0 & 0 & | & z-x-2y \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

che risolubile$\Leftrightarrow z - x - 2y = 0$ che é l'equazione cartesiana di un piano.

Osservazione 51 (equazioni cartesiane).
Sia Z il sottospazio generato da

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

Per trovare le equazioni cartesiane che defniscono Z innanzitutto costruiamo la matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che definisce un'applicazione

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \to A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Voglio una condizione per cui $v \in \mathrm{Imm}(A) \Rightarrow v = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ Risolviamo quindi il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & 0 & | & y \\ 1 & 0 & 0 & | & z \\ 2 & 1 & 0 & | & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & 0 & | & y \\ 0 & 1 & -1 & | & z-x \\ 0 & 1 & -2 & | & t-2x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & 0 & | & y \\ 0 & 0 & -1 & | & z-x-y \\ 0 & 0 & 0 & | & t-2z+y \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

Dunque l'equazione cartesiana che definisce lo spazio é

$$t + y - 2z = 0$$

Osservazione 52 (Linearitá delle composizioni).
V, W, Z , $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Siano $f : V \to W$ e $g : W \to Z$, applicazioni lineari. Ha senso considerare $(g \circ f) : V \to Z$: vogliamo mostare che anche questa é lineare.

- $\forall x, y \in V$: $(g \circ f)(x + y) = g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$

Osservazione 53 (Matrice associata alla composizione).
Supponiamo adesso di avere due applicazioni $\mathbb{K}^n \xrightarrow{f} \mathbb{K}^p \xrightarrow{g} \mathbb{K}^q$. So quindi che

- $\exists A \in M(p, n, \mathbb{K})$ tale che $f(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{K}^n$
- $\exists B \in M(q, p, \mathbb{K})$ tale che $g(y) = By, \forall y \in \mathbb{K}^p$

Dato che $g \circ f$ é lineare , esisterá una matrice $C \in M(q, n, \mathbb{K})$ tale che $(g \circ f)(x) = Cx$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$. La matrice C sará legata in qualche modo alle matrici A e B. Per trovare la formula esplicita basta fare il calcolo con le sommatorie.

$$[Ax]_{i1} = A_i x = \sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}[x]_{j1}$$

$$[By]_{h1} = B_h y = \sum_{k=1}^{p} [B]_{hk}[y]_{k1}$$

Si ha quindi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(Ax) = B(Ax) = Cx$$

dunque

$$\begin{aligned} [(g \circ f)(x)]_{h1} = [B(Ax)]_{h1} = \sum_{k=1}^{p} [B]_{hk}[Ax]_{k1} \\ = \sum_{k=1}^{p} [B]_{hk} \left(\sum_{j=1}^{n} [A]_{kj}[x]_{j1} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} [B]_{hk}[A]_{kj} \right) [x]_{j1} \end{aligned} \tag{4.28}$$

Stiamo cercando una relazione tra la matrice C e il vettore x : $[(g \circ f)(x)]_{h1} = C_h x$. Dunque per l'equazione (4.28) si ha che

$$[C]_{hj} = \sum_{k=1}^{p} [B]_{hk}[A]_{kj} = B_h A^j \tag{4.29}$$

che é la formula per il prodotto di matrici e rappresenta la caratterizzazione della matrice associata alla composizione delle due funzioni : $C \equiv BA$.

Definizione 4.6 (Matrice prodotto)**.** Sia $A \in M(p, n)$, $B \in M(q, p)$. BA é la matrice prodotto $(q \times n)$ definita da

$$[BA]_{ji} \equiv B_j A^i \tag{4.30}$$

Si noti che

- La moltiplicazione tra due matrici ha senso solo se il numero di righe di A é uguale al numero di colonne di B, altrimenti non é definita.

- Non vale la proprietá commutativa , $AB \neq BA$.

Osservazione 54.
$M(n, \mathbb{K}, +,$prodotto righe$\times$colonne$)$ é un anello NON commutativo. $\forall A, B, C \in M(n)$ valgono le proprietá

- $ABC = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$

L'elemento neutro per il prodotto tra matrici é la matrice identitá.

$$\mathrm{id}_M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

Osservazione 55.
A differenza di quanto succede nei campi come $\mathbb{R}$ moltiplicando due elementi non nulli in $M(n, \mathbb{K}, +,$prodotto righe$\times$colonne$)$ si puó ottenere la matrice nulla.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

Esistono anche matrici che moltiplicate per se stesse danno la matrice nulla.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

Definizione 4.7 (Matrice nilpotente)**.** Una matrice A si dice nilpotente se $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $A^m = 0$. Il piú piccolo intero m per cui questo succede é detto indice di nilpotenza.

Definizione 4.8 (Isomorfismo)**.** $f : V \to W$ lineare si dice isomorfismo se f é bigettiva.

Definizione 4.9 (Spazi isomorfi)**.** Due spazi V , W si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo tra di essi.

Osservazione 56.
Ogni punto appartente al piano $\mathbb{R}^2$ si puó scrivere come combinazione lineare dei vettori $(0, 1)$, $(1, 0)$, infatti ogni vettore si scrive tramite 2 *coordinate* $v = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$. I vettori $(0, 1)$, $(1, 0)$ generano tutto lo spazio , come é facile verificare.

Capitolo 5

Basi e dimensione

5.1 Applicazioni lineari e basi

Definizione 5.1 (Spazio finitamente generato)**.** Uno spazio vettoriale V si dice finitamente generato se esistono $v_1, \dots, v_n \in V$ tali che $\forall v \in V$, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} : v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, ossia $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = V$. In tal caso $v_1, \dots, v_n$ sono detti generatori di V.

Osservazione 57.
$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ generano $\mathbb{K}^n$.

Osservazione 58.
$\mathbb{K}[x]$ non é finitamente generato. Infatti se lo fosse dovrebbero esistere un numero finito di polinomi con i quali si genera ogni polinomio. Questo insieme di polinomi generatori avranno un grado massimo , che denotiamo con m. Una combinazione lineare di questi polinomi potrá avere al piú grado m , dunque si vede subito che non é possibile rappresentare polinomi di grado superiore ad m, ovvero $\mathbb{K}[x]$ non é finitamente generato.

Definizione 5.2 (Vettori linearmente indipendenti)**.** $v_1, \dots, v_n \in V$ sono detti linearmente indipendenti se $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Altrimenti sono detti dipendenti.

Osservazione 59.
$e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^n$ sono linearmente indipendenti.

Osservazione 60.
$v \in V$ é linearmente indipendente $\Leftrightarrow v \neq 0$. Infatti $av = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee v = 0$. Se $v = 0$, $a \neq 0$ allora v é dipendente, altrimenti $v \neq 0, a = 0$ e v é indipendente.

Osservazione 61.
Se uno tra i vettori $v_1, \dots, v_n$ é nullo allora $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti. Infatti se $v_1 = 0$ allora $v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$.

Proposizione 5.1.1. *Sia $n \geq 2$. I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ almeno uno di essi si puó scrivere come combinazione degli altri.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$: Per ipotesi $\exists a_1, \dots, a_n$ non tutti nulli tali che $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$. Se $a_1 \neq 0$ posso moltiplicare per a_1^{-1} ottenendo $a_1 v_1 a_1^{-1} + \dots + a_n v_n a_1^{-1} = 0 \Rightarrow v_1 = -a_1^{-1} a_2 v_2 - \dots - a_1^{-1} a_n v_n$. Segue la tesi.
$(\Leftarrow)$: Se $v_1 = a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ allora $v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_n v_n = 0$ e non tutti i coefficienti sono nulli , ovvero i vettori sono linearmente dipendenti. $\square$

Osservazione 62.
Se $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti e $m \leq k$ allora $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti.

Osservazione 63.
Se $v_m \in \text{Span}(v_1, \ldots, v_{m-1})$, allora

$$\text{Span}(v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m) = \text{Span}(v_1, \ldots, v_{m-1}) \tag{5.1}$$

Definizione 5.3 (Base)**.** Un insieme ordinato $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di vettori di V é detto base di V se $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti e generano V.

Osservazione 64.
$\{e_1, \ldots, e_n\}$ sono una base di $\mathbb{K}^n$, detta base canonica.

Proposizione 5.1.2. *Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é una base di V, allora ogni $v \in V$ puó essere scritto in modo unico come combinazione lineare dei $v_1, \ldots, v_n$. I coefficienti di questa combinazione lineare sono dette coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ e vengono denotati con $[v]_{\mathcal{B}}$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che un vettore si scriva in due modi diversi

$$\begin{cases} v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \\ v = b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n \end{cases} \Rightarrow (a_1 - b_1)v_1 + \ldots + (a_n - b_n)v_n = 0 \tag{5.2}$$

Dato che $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow a_1 - b_1 = \ldots = a_n - b_n = 0 \Rightarrow a_1 = b_1 = \ldots = a_n = b_n$. □

Fissare una base determina quindi una corrispondenza BIUNIVOCA $[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$, che manda $v \to [v]_{\mathcal{B}}$. L'applicazione $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ é lineare e dunque un isomorfismo.

Osservazione 65.
Sia $\mathcal{S} = \{(1,0), (1,1)\}$ una base di $\mathbb{R}^2$. Per trovare le coordinate di un vettore in questa base bisogna trovare due numeri a, b tali che

$$(x, y) = a(1,0) + b(1,1) \Rightarrow \begin{cases} a + b = x \\ b = y \end{cases} \tag{5.3}$$

Ovvero bisogna risolvere un sistema lineare che ha come soluzioni le coordinate del vettore.

$$[(x,y)]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Corollario 5.1.3. *Se V é un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale che ammette una base formata da n vettori allora V é isomorfo a $\mathbb{K}^n$.*

Teorema 5.1.4. *Siano $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V , $w_1, \ldots, w_k$ vettori di V. Se $k > n$ allora $w_1, \ldots, w_k$ sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11} v_1 + \ldots + a_{1n} v_n \\ &\vdots \\ w_k &= a_{k1} v_1 + \ldots + a_{kn} v_n \end{aligned} \tag{5.5}$$

Prendiamo una combinazione $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_k w_k = 0$ sostituendo si ha

$$\alpha_1(a_{11}v_1 + \ldots + a_{1n}v_n) + \ldots + \alpha_k(a_{k1}v_1 + \ldots + a_{kn}v_n) = 0$$

ossia

$$(a_{11}\alpha_1 + \ldots + a_{k1}\alpha_k)v_1 + \ldots + (a_{1n}\alpha_1 + \ldots + a_{kn}\alpha_k)v_n = 0$$

che é una combinazione lineare nulla dei v_i , allora

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + \ldots + a_{k1}\alpha_k = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{1n}\alpha_1 + \ldots + a_{kn}\alpha_k = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

che é un sistema lineare omogeneo di n equazioni in k incognite. Poiché $k > n$ il sistema ha soluzioni non nulle. □

Corollario 5.1.5. *Se* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *e* $\{w_1, \ldots, w_k\}$ *sono basi di* V *, allora* $n = k$.

Definizione 5.4 (Dimensione)**.** Se V possiede una base finita $\{v_1, \ldots, v_n\}$ diciamo che V ha dimensione n. Se $V = \{0\}$ poniamo $\dim V = 0$.

5.2 Proprietá delle basi

Proposizione 5.2.1 (Algoritmo per l'estrazione di una base)**.** *Supponiamo* $V \neq \{0\}$ *. Da ogni insieme finito di generatori di* V *si puó estrarre una base di* V*.*

Dimostrazione. Siano $v_1, \ldots, v_k$ generatori di V . Posso supporre $v_i \neq 0, \forall i$. Allora v_1 é linearmente indipendente. Passo a controllare la lista $\{v_1, v_2\}$. Si presentano vari casi

1. Se v_1, v_2 sono linearmente indipendenti posso tenerli.

2. Altrimenti $v_2 \in \mathrm{Span}(v_1)$ quindi posso toglierlo dalla lista, ovvero $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \mathrm{Span}(v_1, v_3 \ldots, v_k)$. Questi vettori continuano ad essere un insieme di generatori.

Ripeto il ragionamento partendo dall'inizio. Continuo cosí fino a quando ho esaminato tutti i vettori della lista. □

Corollario 5.2.2. *Sia* $\dim V = n$*. Se* $v_1, \ldots, v_k$ *sono generatori di* V *allora* $k \geq n$

Osservazione 66*.*
Se $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti e $v \notin \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$ allora $v_1, \ldots, v_k, v$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Sia $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k + av = 0$. Deve essere $a = 0$ altrimenti $v \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$. Quindi $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k = 0 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_k = 0$, ovvero i vettori sono linearmente indipendenti. □

Lemma 5.2.3. *Sia* $\dim V = n$*. Se* $v_1, \ldots, v_n$ *sono linearmente indipendenti allora sono una base per* V*.*

Dimostrazione. Basta provare che questi generano V. Se , per assurdo, non generassero V , esisterebbe $v \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$ ma con $v \in V$. Dunque $v_1, \dots, v_n, v$ sarebbero $n+1$ vettori linearmente indipendenti, ma dato che $\dim V = n$ questi vettori non possono essere linearmente indipendenti, dunque é assurdo dire che v non sta in $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$. □

Teorema 5.2.4 (Completamento a base)**.** *Sia* $\dim V = n$ *. Se* $v_1, \dots, v_k$ *sono linearmente indipendenti , allora* $k \leq n$ *ed esistono* $v_{k+1}, \dots, v_n$ *tali che* $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ *é una base di* V*.*

Dimostrazione. Se $k = n$, per il lemma $\{v_1, \dots, v_k\}$ é una base. Se $k < n$ i $v_1, \dots, v_k$ non possono essere generatori . Ci sará quindi un vettore che esce dallo *span* , ovvero $\exists v_{k+1} \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$. Dunque la lista $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ é una lista di vettori linearmente indipendenti. Dunque

1. Se $k+1 = n$ per il lemma $v_1, \dots, v_{k+1}$ sono una base.
2. Se $k+1 < n$ continuo come sopra.

Dopo $n-k$ passi trovo n vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione n e dunque , una base. □

Osservazione 67.
Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una lista di vettori. Se i v_i sono a due a due linearmente indipendenti $\not\Rightarrow$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ linearmente indipendenti. Basta prendere , ad esempio

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

Osservazione 68.
Sia $U = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$, $W = \mathrm{Span}(v_{k+1}, \dots, v_n) \Rightarrow U \cap W = \{0\}$. Infatti se $x \in U \cap W$ allora

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K} : x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \quad (x \in U)$$

$$\exists \beta_{k+1}, \dots, \beta_n \in \mathbb{K} : x = \beta_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \beta_n v_n \quad (x \in W)$$

Facendo la differenza si ottiene

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k - \beta_{k+1} v_{k+1} - \ldots - \beta_n v_n = 0$$

Dato che questi vettori sono linearmente indipendenti , $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \beta_{k+1} = \ldots = \beta_n = 0 \Rightarrow x = 0$. Visto che $U \cap W = \{0\} \Rightarrow \exists U \oplus W$ ssv di V e inoltre $U \oplus W = V$.

Corollario 5.2.5. *Ogni ssv di uno spazio vettoriale* V *di dimensione finita ammette un supplementare.*

Osservazione 69.
Sia $\dim V = n$. Se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti allora $\exists v_{k+1}, \dots, v_n \in V$ tali che $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ sono una base di V.

Dimostrazione. Supponiamo di conoscere $\{w_1, \dots, w_n\}$ base di V. Dunque $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_n\}$ generano V . Utilizziamo l'algoritmo di estrazione di una base.

1. v_1 é indipendente per ipotesi;

2. v_1, v_2 sono indipendenti visto che é un sottoinsieme di un insieme indipendente ;

3. Continuo il ragionamento fino a v_k

4. In seguito si esaminano i vettori $w_1, \dots, w_n$ e si scelgono $(n-k)$ vettori linearmente indipendenti $w_{j_{k+1}}, \dots, w_{j_n}$ per il completamento a base.

□

Proposizione 5.2.6. *V sp. vettoriale finitamente generato. Allora ogni sottospazio W di V é finitamente generato e $\dim W \leq \dim V$. Inoltre $W = V \Leftrightarrow \dim W = \dim V$.*

Dimostrazione. Devo far vedere inizialmente che W é finitamente generato. Se dei vettori di W sono linearmente indipendenti quei vettori sono linearmente indipendenti anche in V . Sia $\dim V = n$. Se $W = \{0\}$ allora la tesi é vera visto che W é finitamente generato e $\dim\{0\} = 0 \leq \dim V = n \Rightarrow 0 \leq n$ che é sempre vero $\forall n$. Supponiamo quindi $W \neq \{0\}$. Allora $\exists w_1 \in W, w_1 \neq 0$. Se $W = \text{Span}\{w_1\}$ allora $\dim W = 1$. Resta da dimostrare che $\dim V \geq \dim W = 1$ ma questo é ovvio perché w_1 é linearmente indipendente in $V \Rightarrow \dim V \geq 1$. Se invece $W \neq \text{Span}(w_1)$, $\exists w_2 \in W - \text{Span} w_1$. Allora w_1, w_2 sono linearmente indipendenti (in W e in V). Ho quindi trovato 2 vettori linearmente indipendenti : se $W = \text{Span}\{w_1, w_2\}$ allora $\dim W = 2$ e $\dim V \geq 2$, altrimenti continuo. Dopo al piú n passi il procedimento termina altrimenti troverei $(n+1)$ vettori linearmente indipendenti in V, che é assurdo. Rimane da dimostrare che $W = V \Leftrightarrow \dim W = \dim V$. Supponiamo che $\dim W = \dim V = n$. Quindi posso prendere $\{w_1, \dots, w_n\}$ base di W. $w_1, \dots w_n$ sono indipendenti in W e quindi anche in V. Dato che sono n vettori indipendenti in V , sono anche una base di V. Dunque

$$V = \text{Span}\{w_1, \dots, w_n\} = W$$

□

Proposizione 5.2.7 (Formula di Grassmann)**.** *U, W sottospazi vettoriali di dimensione finita di V. Allora*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \tag{5.8}$$

Dimostrazione. Sia $\dim U = h$, $\dim W = k$, $\dim(U \cap W) = s$. Sia $\{z_1, \dots, z_s\}$ una base di $U \cap W$. Utilizzo l'algoritmo di completamento a base : $\exists u_1, \dots, u_{h-s} \in U, \exists w_1, \dots, w_{k-s} \in W$ tali che

$$\{z_1, \dots, z_s, u_1, \dots, u_{h-s}\} \quad \text{é base di } U$$

$$\{z_1, \dots, z_s, w_1, \dots, w_{k-s}\} \quad \text{é base di} W$$

Per provare il teorema basta provare che $\{z_1, \dots, z_s, u_1, \dots, u_{h-s}, w_1, \dots, w_{k-s}\}$ é una base di $U + W$. Infatti avrei che $\dim(U + W) = h + k - s$ e visto che questi vettori sono una base per $U + W$ allora seguirebbe la tesi. Passiamo quindi a dimostrare che

Sono generatori : Ogni vettore del sottospazio $U + W$ si scrive, per definizione di somma , come $u + w$ dove $u \in U, w \in W$. Allora $u = \text{Span}(u_1, \dots, u_{h-s}, z_1, \dots, z_s), w = \text{Span}(w_1, \dots, w_{k-s}, z_1, \dots, z_s) \Rightarrow u + w = \text{Span}(u_1, \dots, u_{h-s}, w_1, \dots, w_{k-s}, z_1, \dots, z_s)$.

Sono linearmente indipendenti : Sia

$$\underbrace{a_1z_1 + \ldots + a_sz_s}_{z} + \underbrace{b_1u_1 + \ldots + b_{h-s}u_{h-s}}_{u} + \underbrace{c_1w_1 + \ldots + c_{k-s}w_{k-s}}_{w} = 0$$

dunque $z + u + w = 0 \Rightarrow z + u = -w$. Si noti che $z \in U \cap W$, $u \in U$, $w \in W$. Visto che deve valere l'uguaglianza deve valere $-w \in U \cap W$. Posso quindi scrivere $w = \alpha_1z_1 + \ldots + \alpha_sz_s$, per cui ho

$$a_1z_1 + \ldots + a_sz_s + b_1u_1 + \ldots + b_{h-s}u_{h-s} + \alpha_1z_1 + \ldots + \alpha_sz_s = 0$$

Questa é una combinazione lineare dei vettori della lista $\{z_1, \ldots, z_s, u_1, \ldots, u_{h-s}\}$ che sappiamo essere una base di U dunque vettori linearmente indipendenti :

$$b_1 = \ldots = b_{h-s} = 0$$

Dunque la combinazione lineare iniziale si puó scrivere come

$$a_1z_1 + \ldots + a_sz_s + c_1w_1 + \ldots + c_{k-s}w_{k-s} = 0$$

che é una combinazione lineare nulla della lista $\{z_1, \ldots, z_s, w_1, \ldots, w_{k-s}\}$ che é una base , quindi $a_1 = \ldots = a_s = c_1 = \ldots = c_{k-s} = 0$. $\square$

Capitolo 6

Basi e applicazioni lineari

Proposizione 6.0.8. *Sia $f : V \to W$ lineare.*

1. *Se $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti e f é iniettiva allora $f(v_1), \dots, f(v_m)$ sono linearmente indipendenti.*

2. *Se $v_1, \dots, v_m$ generano V , allora $f(v_1), \dots, f(v_m)$ generano* $\mathrm{Imm} f$.

Dimostrazione. 1. Sia $a_1 f(v_1) + \dots + a_m f(v_m) = 0 \Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \in \ker f = \{0\} \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$ per la lineare indipendenza.

2. Devo mostrare che ogni vettore dell'immagine puó essere scritto come combinazione lineare dei $f(v_1), \dots, f(v_m)$. Sia $y = f(x) \in \mathrm{Imm} f, x \in V$. Dunque $x = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Dunque

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{m} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i f(v_i) \tag{6.1}$$

□

Corollario 6.0.9. *Se $f : V \to W$ é isomorfismo , f trasforma ogni base di V in una base di W.*

Teorema 6.0.10 (Formula delle dimensioni)**.** *V spazio vettoriale finitamente generato. $f : V \to W$ lineare. Allora*

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \mathrm{Imm} f \tag{6.2}$$

Dimostrazione. Sia $\dim V = n$, $\dim \ker f = k$.
Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $\ker f$. La completo a base di V, $\{v_1, \dots, v_k, \dots, v_n\}$. Per le proprietá delle applicazioni lineari si ha che $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano $\mathrm{Imm} f$, ossia $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ generano $\mathrm{Imm} f$. Dimostraimo che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono anche linearmente indipendenti. Sia $a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + a_n f(v_n) = 0 \Rightarrow f(a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n) = 0 \Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i \in \ker f \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ tali che

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_k v_k - a_{k+1} v_{k+1} - \dots - a_n v_n = 0$$

che é una combinazione lineare nulla dei vettori $v_1, \dots, v_k, \dots, v_n \Rightarrow a_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$. Dunque $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$ é una base di $\mathrm{Imm} f$ cioé $\dim \mathrm{Imm} f = n - k = \dim V - \dim \ker f$. □

Osservazione 70.
Abbiamo provato che $f|_{\text{Span}\{v_{k+1},\dots,v_n\}}$ é iniettiva.

Corollario 6.0.11. *$f : V \to W$ lineare . Se $\dim V = \dim W$ allora f é iniettiva $\Leftrightarrow$ f é surgettiva. Dunque se $f : V \to V$, f iniettiva $\Leftrightarrow$ f surgettiva.*

Dimostrazione. f é iniettiva$\Leftrightarrow \ker f = \{0\} \Leftrightarrow \dim V = \dim \text{Imm} f \Leftrightarrow \dim W = \dim \text{Imm} f \Leftrightarrow \text{Imm} f = W \Leftrightarrow f$ é surgettiva. □

Corollario 6.0.12. *V e W sono isomorfi $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Se $\dim V = \dim W = n$ allora[1] $V \simeq \mathbb{K}^n \simeq W$.
($\Rightarrow$) Se $\exists f : V \to W$ isomorfismo basta usare la formula delle dimensioni. □

Osservazione 71.
Sia $f : V \to W$ isomorfismo. L'applicazione inversa $f^{-1} : W \to V$ tale che $f(x) = y$ é lineare. Infatti

- $\forall y_1, y_2 \in W$ siano $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, cioé $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Dunque
$$f^{-1}(y_1 + y_2) = f^{-1}(f(x_1) + f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$$
come volevasi dimostrare.

- Sia $\lambda \in \mathbb{K}, y \in W$. Dobbiamo dimostrare che $f^{-1}(\lambda y) = \lambda f^{-1}(y)$. Sia $x = f^{-1}(y)$, cioé $f(x) = y$. Allora
$$f^{-1}(\lambda y) = f^{-1}(\lambda f(x)) = f^{-1}(f(\lambda x)) = \lambda x = \lambda f^{-1}(y)$$

Definizione 6.1 (Gruppo lineare)**.** Si definisce
$$GL(V) = \{f \in \hom(V, W) : f \text{ isomorfismo}\} \tag{6.3}$$

Osservazione 72.
Considero la composizione $\circ$ su $GL(V)$, ovvero l'operazione definita da $\circ : GL(V) \times GL(V) \to GL(V)$ che agisce su $(f, g) \to g \circ f$. Si noti che

1. id_V é un isomorfismo $\Rightarrow \text{id}_V \in GL(V)$
2. $\forall f, g, h \in GL(V) \Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
3. $\forall f \in GL(V)$, $\exists f^{-1} \in GL(V)$ tale che $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}_V$

Osservazione 73.
$\forall f \in GL(V)$, $f \circ \text{id}_V = \text{id}_V \circ f = f$. La proprietá (3) dell'osservazione precedente diventa quindi la proprietá di esistenza dell'elemento inverso per $GL(V)$.

Definizione 6.2 (Gruppo)**.** Sia $G \neq \emptyset$ un insieme con l'operazione $* : G \times G \to G$. $(G, *)$ si dice gruppo se

1. $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ si ha $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$.
2. $\exists e \in G$ tale che $\forall g \in G$, $g * e = e * g = g$.

[1] Il simbolo $\simeq$ sta per isomorfismo.

3. $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ tale che $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$

4. $\forall g, h \in G, g * h = h * g$

La proprietá (4) é aggiuntiva : se questa viene rispettata si parla di gruppo Abeliano. Dunque $(GL(V), \circ)$ é un gruppo, detto gruppo lineare.

Definizione 6.3 (Isomorfia)**.** Siano $V, W\mathbb{K}$-spazi vettoriali finitamente generati. Dico che $V\mathcal{R}W \Leftrightarrow V$ e W sono isomorfi. Si noti che $\mathcal{R}$ é una relazione di equivalenza! Si puó quindi definire una classe di equivalenza

$$[V] = \{W, \mathbb{K}\text{-spazi vettoriali isomorfi a } V\}$$

Proposizione 6.0.13. *$V\mathcal{R}W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$. Ovvero la dimensione é un invariante per $\mathcal{R}$.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$: Se $\varphi : V \to W$ isomorfismo allora $\dim V = \underbrace{\dim \ker \varphi}_{0} + \underbrace{\dim \mathrm{Imm}\varphi}_{\dim W}$.
$(\Leftarrow)$: Viceversa se $\dim V = \dim W = n$ allora $V \simeq \mathbb{K}^n \simeq W \Rightarrow V\mathcal{R}W$. □

Teorema 6.0.14. *V, W , $\mathbb{K}$-spazi vettoriali , $\dim V = n$.*
Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V e $w_1, \ldots, w_n$ vettori di W. Allora esiste una ed una sola $f : V \to W$ lineare tale che $f(v_1) = w_1, \ldots, f(v_n) = w_n$.

Dimostrazione. Si deve dimostrare l'esistenza e l'unicitá della f.

Esistenza : Sia $v \in V$. Allora esistono unici $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$. Poniamo quindi $f(v) = a_1w_1 + \ldots + a_nw_n$. Devo controllare che questa definizione sia ben posta e che la funzione sia lineare. Si ha $f(v_i) = w_i, \forall i = 1, \ldots, n$ quindi l'applicazione é ben definita. Inoltre f é lineare ,infatti se $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n, z = b_1v_1 + \ldots + b_nv_n$ allora

$$v + z = (a_1 + b_1)v_1 + \ldots + (a_n + b_n)v_n \Rightarrow f(v + z) = (a_1 + b_1)w_1 + \ldots + (a_n + b_n)w_n$$

ovvero

$$f(v + z) = \underbrace{a_1w_1 + \ldots + a_nw_n}_{f(v)} + \underbrace{b_1w_1 + \ldots + b_nw_n}_{f(z)} = f(v) + f(z)$$

Analogamente si prova che $f(\lambda v) = \lambda f(v), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in V$.

Unicitá : Se f é lineare e $f(v_i) = w_i$ allora

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_iv_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_if(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_iw_i = a_1w_1 + \ldots + a_nw_n \tag{6.4}$$

Ovvero questo é l'unico modo di scrivere l'applicazione di cui si é dimostrata l'esistenza. In altre parole, provando a definire questa applicazione in un altro modo si nota che le due definizioni devono coincidere per le proprietá dell'applicazione stessa, dunque l'applicazione é unica.

□

Proposizione 6.0.15. *$f : V \to W$; $g : W \to Z$ lineari. Allora*

1. $\dim \mathrm{Imm}(g \circ f) \leq \min\{\dim \mathrm{Imm} f, \dim \mathrm{Imm} g\}$

2. Se f é isomorfismo allora $\dim \mathrm{Imm}(g \circ f) = \dim \mathrm{Imm} g$.

3. Se g é isomorfismo allora $\dim \mathrm{Imm}(g \circ f) = \dim \mathrm{Imm} f$.

Dimostrazione. Dividiamo le tre dimostrazioni

1. Scriviamo l'uguaglianza $\mathrm{Imm}(g \circ f) = \mathrm{Imm}\left(g|_{\mathrm{Imm} f}\right)$ per l'osservazione 8. Si tratta quindi di calcolare la dimensione dell'immagine associata ad una sola applicazione , che é lineare. Applichiamo quindi la formula delle dimensioni

$$\dim(\mathrm{Imm}(g \circ f)) = \dim \mathrm{Imm}(g|_{\mathrm{Imm} f}) = \dim(\mathrm{Imm} f) - \underbrace{\dim \ker(g|_{\mathrm{Imm} f})}_{\geq 0} \leq \dim(\mathrm{Imm} f)$$

   Inoltre $\mathrm{Imm}(g \circ f) \subset \mathrm{Imm} g \Rightarrow \dim \mathrm{Imm}(g \circ f) \leq \dim \mathrm{Imm} g$.

2. Se f é isomorfismo allora $f(V) = W$ quindi $\mathrm{Imm}(g \circ f) = \mathrm{Imm} g$.

3. Se g é isomorfismo allora $\ker g = \{0\}$ quindi $\dim \mathrm{Imm}(g \circ f) = \dim \mathrm{Imm} f$.

$\square$

Capitolo 7

Rango

7.1 Rango

Definizione 7.1 (Rango)**.** Sia $f : V \to W$ lineare. Poniamo $\text{rk}(f) = \dim \text{Imm} f$, rango di f. In particolare se $A \in M(p, n, \mathbb{K})$, e dunque $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$, $x \to Ax$, $\text{rk}(A) = \dim \text{Imm} A = \dim \mathcal{C}(A)$.

Vogliamo poter calcolare il rango di una applicazione f e trovare una base dell'immagine di f. Cominciamo dal caso , relativamente piú semplice, delle matrici. Sia $A \in M(p, n, \mathbb{K})$ e poniamo $\mathcal{R}(A) = \text{Span}(A_1, \dots, A_p)$.

Proposizione 7.1.1. *Sia S una ridotta a scalini di A. Allora*

1. $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(S)$.
2. $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(S)$.

Dimostrazione.
1. Dato che S ha come righe le combinazioni lineari delle righe di A allora gli spazi generati dalle due matrici sono uguali.
2. I sistemi $Ax = 0$ e $Sx = 0$ sono equivalenti , quindi $\ker A = \ker S$. Per la formula delle dimensioni allora $\dim \text{Imm} A = \dim \text{Imm} S \Rightarrow \text{rk}(A) = \text{rk}(S)$.

□

Proposizione 7.1.2. *Sia S una matrice a scalini con r pivots nelle colonne $S^{j_1}, \dots, S^{j_r}$. Allora*

1. *$\{S_1, \dots, S_r\}$ é una base di $\mathcal{R}(S)$.*
2. *$\{S^{j_1}, \dots, S^{j_r}\}$ é una base di $\mathcal{C}(S)$ e dunque* $\text{rk} S = r$.

Dimostrazione.
1. $S_1, \dots, S_r$ ovviamente generano $\mathcal{R}(S)$. Inoltre $S_1, \dots, S_r$ sono linearmente indipendenti : prendendo una combinazione lineare $a_1 S^1 + \ldots + a_r S^r = 0$ dalla prima somma si ottiene un vettore. Consideriamo l'ultima componente non nulla di tale vettore (che otteniamo dalla sola colonna S^r) : $a_r p_r$. Affinché sia uguale a 0 , poiché $p_r \neq 0$ per ipotesi si ottiene $a_r = 0$. Si itera il procedimento, considerando che ora l'ultima componente non nulla é data dalla colonna S^{r-1}.

2. La dimostrazione che $S^{j_1},\dots,S^{j_r}$ sono linearmente indipendenti é analoga al caso precedente : bisogna solo ragionare per colonne invece che per righe. Per vedere che $S^{j_1},\dots,S^{j_r}$ generano $\mathcal{C}(S)=\operatorname{Span}\{S^1,\dots,S^r\}$ basta far vedere che $\forall i\neq j_1,\dots,j_r$ (ovvero per le colonne non selezionate) $S^i\in\operatorname{Span}(S^{j_1},\dots,S^{j_r})$, ovvero un elemento fuori dalla lista dei generatori prescelti si puó scrivere come combinazione lineare degli elementi stessi. Voglio quindi mostrare che esistono $\alpha_1,\dots,\alpha_r\in\mathbb{K}$ tali che $S^i=\alpha_1S^{j_1}+\dots+\alpha_rS^{j_r}$, cioé che il sistema
$$\left(S^{j_1}\middle|\dots\middle|S^{j_r}\right)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S^i\end{pmatrix}\tag{7.1}$$
ha soluzione. Dato che il sistema é giá ridotto a scalini si nota subito che i pivots sono r quindi basta cercare i casi per i quali , aggiungendo la colonna dei termini noti ,S^i, non cambiano il numero di pivots. Perché questo succeda occorre che dalla posizione $(r+1)$-esima di S^i gli elementi siano nulli. Ma questo é sicuramente verificato perché S^i é stata ricavata dalla matrice completa del sistema , quindi sotto la posizione r ha tutti elementi nulli.

□

Corollario 7.1.3. *Il numero di pivots di una ridotta a scalini S di A non dipende dalle operazioni elementari per riga eseguite.*

Dimostrazione. numero di pivots= $\operatorname{rk}(S)=\operatorname{rk}(A)$. □

Corollario 7.1.4. *Per ogni matrice A , $\dim\mathcal{R}(A)=\dim\mathcal{C}(A)$ ovvero il rango per righe é equivalente al rango per colonne.*

Dimostrazione. Sia S una ridotta a scala di A con r pivots . Allora
$$\dim\mathcal{R}(A)=\dim\mathcal{R}(S)=r=\dim\mathcal{C}(S)=\dim\mathcal{C}(A)$$

□

Corollario 7.1.5. *Per ogni matrice A ,* $\operatorname{rk}({}^tA)=\operatorname{rk}(A)$

Dimostrazione.
$$\operatorname{rk}({}^tA)=\dim\mathcal{C}({}^tA)=\dim\mathcal{R}(A)=\dim\mathcal{C}(A)=\operatorname{rk}(A)$$

□

Teorema 7.1.6 (di Rouché-Capelli)**.** *Il sistema lineare $Ax=B$ é risolubile* $\Leftrightarrow\operatorname{rk}(A)=\operatorname{rk}(A|B)$.

Dimostrazione. Per l'algoritmo di Gauss $Ax=B$ é equivalente a $Sx=T$ con $(S|T)$ scalini ed é risolubile $\Leftrightarrow\operatorname{rk}(S)=\operatorname{rk}(S|T)$. Ma $\operatorname{rk}(A)=\operatorname{rk}(S)$ e $\operatorname{rk}(A|B)=\operatorname{rk}(S|T)$. □

7.2 Come trovare una base dello spazio delle soluzioni di $Ax = 0$

Sia $A \in M(p, n, \mathbb{K})$. Sappiamo che $S_0 = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\} = \ker A$. Sia $r = \mathrm{rk}A$, questo sará il numero di pivots di una qualsiasi ridotta a scalini di A. Dalla formula delle dimensioni ottengo che

$$\dim S_0 = \dim \ker A = n - \dim \mathrm{Imm}A = n - r$$

Per calcolare una base di S_0 basta trovare $n - r$ vettori che generano lo spazio S_0. Sia S una ridotta a scala di A : S ha r pivots. Supponiamo che questi stiano nelle colonne $S^1, \ldots, S^r$. Allora il sistema $Ax = 0$ é equivalente a $Sx = 0$: in seguito si ricavano le variabili corrispondenti alle colonne contenenti i pivots in funzione delle altre :

$$\begin{cases} s_{11}x_1 + \ldots + s_{1r}x_r = -s_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - s_{1n}x_n \\ s_{22}x_2 + \ldots + s_{2r}x_r = -s_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - s_{2n}x_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ s_{rr}x_r = \ldots \end{cases} \tag{7.2}$$

con $s_{ij} \neq 0$ per $i = j$. Se fisso i valori dei parametri $x_{r+1}, \ldots, x_n$ la colonna dei termini noti diventa un vettore numerico. Dunque quando ricavo $x_1, \ldots, x_r$ trovo una soluzione numerica ed unica. La soluzione sará del tipo

$$\begin{aligned} Y^{r+1} &= (\ldots, 1, 0, \ldots, 0) \\ Y^{r+2} &= (\ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ Y^n &= (\ldots, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{7.3}$$

Questi vettori sono ovviamente linearmente indipendenti e sono $n - r$ dunque formano una base di S_0.

7.3 Matrici invertibili e gruppo lineare

Abbiamo giá detto che $M(n, \mathbb{K})$ é un anello ma non un campo.

Definizione 7.2 (Matrice invertibile)**.** $A \in M(n, \mathbb{K})$ si dice invertibile se $\exists B \in M(n, \mathbb{K})$ tale che $AB = BA = \mathbb{I}$ dove $\mathbb{I}$ é l'elemento neutro nell'anello per il prodotto. Se B esiste é unica e viene detta inversa di A, $B = A^{-1}$.

Osservazione 74.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

non é invertibile perché

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall x, y, z, t \tag{7.5}$$

Definizione 7.3 (Gruppo lineare)**.** Denotiamo con

$$GL(n,\mathbb{K}) = \{A \in M(n,\mathbb{K}) : A \text{ é invertibile}\}$$

Osservazione 75.
Se $A, B \in GL(n,\mathbb{K}) \Rightarrow AB \in GL(n,\mathbb{K})$. Infatti $A, B \in GL(n,\mathbb{K}) \Rightarrow \exists A^{-1}, B^{-1} \Rightarrow (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\mathbb{I}A^{-1} = \mathbb{I}$ e dunque $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Osservazione 76.
$A \in GL(n) \Rightarrow A^{-1}$ é invertibile e $(A^{-1})^{-1} = A$. Infatti $(A^{-1})A = AA^{-1} = \mathbb{I}$.

Osservazione 77.
$(GL(n,\mathbb{K}), \cdot)$ é un gruppo , detto gruppo lineare, infatti

- vale la proprietá associativa per il prodotto
- $\mathbb{I}$ é l'elemento neutro e$\in GL(n,\mathbb{K})$. $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$.
- Ogni elemento dell'insieme possiede un inverso per quanto detto prima.

Osservazione 78.
$A \in GL(n)$, $A^{-1}A = \mathbb{I}$ posso interpretarla in termini di applicazioni lineari :

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{A} \mathbb{K}^n \xrightarrow{A^{-1}} \mathbb{K}^n$$

Questo é equivalente a dire che A é bigettiva , ossia é un isomorfismo. Le matrici invertibili sono dunque isomorfismi in $\mathbb{K}^n$.

Proposizione 7.3.1. *Sono fatti equivalenti*

1. *A invertibile*$\Rightarrow A \in GL(n,\mathbb{K})$
2. *A isomorfismo*
3. $\dim \mathrm{Imm} A = n = \mathrm{rk} A$.

Osservazione 79.
$v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. La dimensione di $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$ si puó calcolare utilizzando gli ultimi metodi studiati. Costruisco quindi la matrice

$$A = \left(v_1 \middle| \ldots \middle| v_k\right) \tag{7.6}$$

Poiché $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k) = \mathcal{C}(A)$ si tratta di calcolare $\mathrm{rk}A$.

Osservazione 80.
Se S é una ridotta a scalini di A allora $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(S)$ ma $\mathcal{C}(A) \neq \mathcal{C}(S)$ in generale. Per trovare una base non conviene quindi ridurre a scalini.

Definizione 7.4 (Matrice elementare)**.** Si chiama matrice elementare ogni matrice che si ottiene dalla matrice identitá con un'operazione elementare per righe. I tipi di matrici elementari sono principalmente 3 :

1. E_{ij} ottenuta scambiando I_i, I_j
2. $E_i(\alpha)$ ottenuta moltiplicando I_i per $\alpha \neq 0$.

3. $E_{ij}(\alpha)$ sommando a I_i α volte I_j.

Osservazione 81.
Se B é la matrice ottenuta da A con una operazione elementare per riga , allora B coincide con la matrice ottenuta moltiplicando A a sinistra per la matric elementare corrispondente a quella operazione elementare.

Osservazione 82.

$$(E_{ij})^{-1} = E_{ij} \quad ; \quad (E_i(\alpha))^{-1} = E_i(\alpha^{-1}) \quad ; \quad (E_{ij}(\alpha))^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$$

Osservazione 83.
$f : V \to W$ isomorfismo , $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V. Dunque $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti e sono generatori dell'immagine $\Rightarrow \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ é una base di W. Dunque un isomorfismo trasforma basi in basi.

Osservazione 84.
L'algoritmo di Gauss puó essere rivisto con questi ultimi risultati. In effetti questo puó essere interpretato come una moltiplicazione a sinistra per un numero n di matrici elementari.

$$A \rightsquigarrow E_1A \rightsquigarrow E_2E_1A \ldots \rightsquigarrow \underbrace{E_n \ldots E_1}_{M} A = S$$

M é invertibile perché é il prodotto di matrici invertibili. Dunque se M é invertibile allora é un isomorfismo da $\mathbb{K}^p$ a $\mathbb{K}^p$. Dato che $MA = S$ allora

$$\mathrm{rk}S = \dim \mathrm{Imm}S = \dim \mathrm{Imm}(MA) = \dim \mathrm{Imm}A = \mathrm{rk}A$$

Inoltre $\mathrm{Imm}S = M(\mathrm{Imm}A)$. Ma noi conosciamo una base di $\mathrm{Imm}S$ che sono le colonne contenenti i pivots della matrice $S \Rightarrow \{S^{j_1}, \ldots, S^{j_r}\}$ é una base di $\mathrm{Imm}S$. Dato che M é un isomorfismo trasforma basi in basi , una base di $\mathrm{Imm}A$ é data da $M^{-1}\,\mathrm{Imm}S \Rightarrow \{M^{-1}(S^{j_1}), \ldots, M^{-1}(S^{j_r})\}$ é una base di $\mathrm{Imm}A$. Ma osservando la moltiplicazione $M^{-1}S$ si nota che $M^{-1}(S^{j_1}) = A^{j_1}$ dunque una base di $\mathrm{Imm}A$ é data da

$$\{M^{-1}(S^{j_1}) = A^{j_1}, \ldots, M^{-1}(S^{j_r}) = A^{j_r}\}$$

Proposizione 7.3.2. *Se $\{S^{j_1}, \ldots, S^{j_r}\}$ sono le colonne che contengono i pivots di una ridotta a scala di A ,allora $\{A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}\}$ sono una base di* $\mathrm{Imm}A$.

Osservazione 85.
Sia $v_1, \ldots, v_m$ un insieme indipendente di $\mathbb{K}^n$. Per completarlo a base costruisco $A = \big(v_1\big|\ldots\big|v_m\big|e_1\big|\ldots\big|e_n\big)$. Riducendo a scalini troveró n pivots :i primi m nelle prime m colonne. Prendo le colonne che contengono i pivots.

Osservazione 86.
Dati dei vettori $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n$ trovare una base dello spazio che essi generano. Sia

$$A = \Big(v_1\Big|\ldots\Big|v_k\Big)$$

allora $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k) = \mathcal{C}(A)$. Riduciamo a scalini A , trovando la matrice S. Se $S^{j_1}, \ldots, S^{j_r}$ sono le colonne contenenti i pivots , allora $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}\}$ sono una base di $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$.

7.4 Calcolo dell'inversa

Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. So che A é invertibile$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rk}(A) = n$. Cerchiamo prima un'inversa destra, ovvero una matrice $x \in M(n)$ tale che $Ax = \mathbb{I}$, ossia

$$A\left(x^1\middle|\ldots\middle|x^n\right) = \mathbb{I} \Rightarrow \left(Ax^1\middle|Ax^2\middle|\ldots\middle|Ax^n\right) = \left(\mathbb{I}^1\middle|\ldots\middle|\mathbb{I}^n\right) \tag{7.7}$$

Per imporre l'uguaglianza tra questi matrici bisogna imporre

$$\begin{cases} Ax^1 = \mathbb{I}^1 \\ \vdots \quad \vdots \\ Ax^n = \mathbb{I}^n \end{cases} \tag{7.8}$$

che sono sistemi lineari $n \times n$. Si noti , peró , che la matrice dei coefficienti é A , per ogni sistema ; le uniche cose che cambiano sono la colonna delle incognite e la colonna dei termini noti. Dunque le operazioni elementari necessarie per trasformare la matrice A in una matrice a scalini sono le stesse per ogni sistema visto che la matrice A é sempre la stessa. Posso quindi ridurre a scalini direttamente la matrice completa del sistema $\left(A\middle|\mathbb{I}\right)$. Dopo aver ridotto a scala A si potrá controllare se i pivots sono n , cioé se A é invertibile : ma si puó fare anche di piú! In effetti si puó continuare la riduzione a scala applicando l'algoritmo di Gauss *al contrario* in modo da ottenere una matrice diagonale. In seguito si puó moltiplicare ogni pivots della matrice A diagonalizzata per il suo inverso (operazione lecita dato che ci troviamo in un anello) ottenendo l'identitá da A. Si otterrá quindi $\left(\mathbb{I}\middle|B\right)$. Le colonne di B cosí ottenute rappresentano quindi le soluzioni $x^1, \ldots, x^n$ visto che $\mathbb{I}x^1 = x^1, \ldots, \mathbb{I}x^n = x^n \Rightarrow B = (x^1, \ldots, x^n)$ =inversa destra. Resta da vedere se questa inversa coincide anche con l'inversa sinistra. Poiché sono passato da $(A|\mathbb{I})$ a $(\mathbb{I}|B)$ con operazioni elementari per riga , allora

$$\left(\mathbb{I}\middle|B\right) = M\left(A\middle|\mathbb{I}\right) = \left(MA\middle|M\right)$$

Se deve valere l'uguaglianza tra due matrici allora $MA = \mathbb{I}$; $M = B$ e quindi $BA = \mathbb{I}$. Vogliamo ora generalizzare questo metodo a spazi qualsiasi, ad esempio lo spazio dei polinomi.

7.5 Rappresentazione matriciale di una applicazione lineare

Sia $f : V \to W$ lineare . Siano inoltre $\mathcal{S} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V e $\mathcal{R} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base di W. La matrice di $M(m, n, \mathbb{K})$

$$A \equiv m(f)_{\mathcal{S},\mathcal{R}} = \left([f(v_1)]_{\mathcal{R}}\middle|\ldots\middle|[f(v_n)]_{\mathcal{R}}\right) \tag{7.9}$$

si chiama matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{R}$. Vediamo perché questa definizione risulta utile. Sia $v \in V \Rightarrow v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n \Rightarrow f(v) = x_1f(v_1) + \ldots + x_nf(v_n) = x_1(a_{11}w_1 + \ldots + a_{m1}w_m) + \ldots + x_n(a_{1n}w_1 + \ldots + a_{mn}w_m) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)w_1 + \ldots + (a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)w_m$ ovvero

$$[f(v)]_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A[v]_{\mathcal{S}} \tag{7.10}$$

Ovvero

$$[f(v)]_{\mathcal{R}} = A[v]_{\mathcal{S}}$$

Dunque A é univocamente fissata da questa relazione.

Teorema 7.5.1. $\dim V = n, \dim W = m$. *Sia* $\mathcal{S} = \{v_1, \dots, v_n\}$ *base di* V *e* $\mathcal{R}$ *base di* W. *Allora l'applicazione* $m_{\mathcal{S},\mathcal{R}} : \hom(V,W) \to M(m,n,\mathbb{K})$ *definita da* $f \to m(f)_{\mathcal{S},\mathcal{R}}$ *é un isomorfismo.*

Dimostrazione.

- Si verifica facilmente che é lineare, infatti bisogna far vedere che $\forall f, g \in \hom(V,W)$ allora $m(f+g)_{\mathcal{S},\mathcal{R}} = m(f)_{\mathcal{S},\mathcal{R}} + m(g)_{\mathcal{S},\mathcal{R}}$
- $m_{\mathcal{S},\mathcal{R}}$ é iniettiva : infatti se $f \in \ker(m_{\mathcal{S},\mathcal{R}})$, ossia $m_{\mathcal{S},\mathcal{R}}(f) = 0$, allora $f(v_1) = \ldots = f(v_n) = 0 \Rightarrow f(v) = 0$ allora $m_{\mathcal{S},\mathcal{R}}$ é iniettiva perché l'unica applicazione che sta nel nucleo é l'applicazione nulla.
- $m_{\mathcal{S},\mathcal{R}}$ é surgettiva : $\forall A \in M(m,n), \exists! f : V \to W$ lineare tale che $[f(v_1)]_{\mathcal{R}} = A^1, \dots, [f(v_n)]_{\mathcal{R}} = A^n$. Allora $m(f)_{\mathcal{S},\mathcal{R}} = A$.

□

Corollario 7.5.2.

$$\dim \hom(V,W) = n \cdot m$$

Dimostrazione. Siccome é un isomorfismo allora $\dim \ker(m_{\mathcal{S},\mathcal{R}}) = 0 \Rightarrow \dim \hom(V,W) = \dim(M(m,n)) = m \cdot n$. □

Proposizione 7.5.3 (Matrice della composizione)**.**

$$U_{\mathcal{S}} \xrightarrow{f} V_{\mathcal{T}} \xrightarrow{g} W_{\mathcal{R}}$$

Se $m(f)_{\mathcal{S},\mathcal{T}} = A$ *e* $m(g)_{\mathcal{T},\mathcal{R}} = B$ *allora* $m(g \circ f)_{\mathcal{S},\mathcal{R}} = BA$.

Dimostrazione. $\forall u \in U$ si ha $[(g \circ f)(u)]_{\mathcal{R}} = [g(f(u))]_{\mathcal{R}} = B[f(u)]_{\mathcal{T}} = BA[u]_{\mathcal{S}}$ □

Proposizione 7.5.4. $f : V \to W$ *lineare* , $A = m(f)_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$. *Allora* $\mathrm{rk} f = \mathrm{rk} A$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{S} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Allora $\mathrm{Imm} f = \mathrm{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$. Inoltre $[f(v_1)]_{\mathcal{T}} = A^1, \dots, [f(v_n)]_{\mathcal{T}} = A^n$. Se $\varphi = [\cdot]_{\mathcal{T}} : W \to \mathbb{K}^m$ é l'isomorfismo indotto dalla base $\mathcal{T}$, allora $\varphi(\mathrm{Imm} f) = \mathcal{C}(A) = \mathrm{Imm} A$ per cui $\dim \mathrm{Imm} f = \dim \mathrm{Imm} A$, ovvero $\mathrm{rk} f = \mathrm{rk} A$. □

Corollario 7.5.5. *Se* $\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$ *sono una base di* $\mathrm{Imm} A$, *allora* $\{f(v_{j_1}), \dots, f(v_{j_r})\}$ *sono una base di* $\mathrm{Imm} f$.

Corollario 7.5.6. $f : V \to W$ *lineare* , $\dim V = \dim W = n$. *Allora* f *é un isomorfismo*$\Leftrightarrow$ $A = m(f)_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ *é invertibile*$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rk}(A) = n$.

Dimostrazione. Si noti che f é isomorfismo$\Leftrightarrow \mathrm{rk}(f) = n \Leftrightarrow \mathrm{rk}(A) = n \Leftrightarrow A$ é invertibile. □

7.6 Matrice del cambiamento di base

Prendiamo $V_{\mathcal{S}} \xrightarrow[N]{\text{id}} V_{\mathcal{T}}$. Allora $\forall v \in V \Rightarrow [\mathbb{I}v]_{\mathcal{T}} = [v]_{\mathcal{T}} = N[v]_{\mathcal{S}}$ quindi N é la matrice che lega le coordinate di V rispetto a basi diverse. N é la matrice del cambiamento di base.

Osservazione 87.
Se N é la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$, la matrice del cambiamento di base a $\mathcal{T}$ a $\mathcal{S}$ é N^{-1}. Infatti

$$V_{\mathcal{S}} \xrightarrow[N]{\text{id}} V_{\mathcal{T}} \xrightarrow[M]{\text{id}} V_{\mathcal{S}} \quad , \quad MN = \mathbb{I} \Rightarrow M = N^{-1}$$

Osservazione 88.
Prendiamo $V_{\mathcal{S}} \xrightarrow[A]{f} W_{\mathcal{T}}$ e $V_{\mathcal{S}'} \xrightarrow[A']{f} W_{\mathcal{T}'}$. Ci chiediamo che legame sussiste tra A ed A'. Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} V_{\mathcal{S}} \arrow[r, "f", "A"'] & W_{\mathcal{T}} \arrow[d, "M"', "\text{id}"] \\ V_{\mathcal{S}'} \arrow[u, "N", "\text{id}"'] \arrow[r, "f", "A'"'] & W_{\mathcal{T}'} \end{tikzcd} \tag{7.11}$$

allora

$$A' = MAN$$

.

Definizione 7.5 (SD-equivalenza)**.** Siano $A, B \in M(p, n)$. Diciamo che A e B sono SD-equivalenti (e scriviamo $A \equiv B$) $\Leftrightarrow \exists M \in GL(p), \exists N \in GL(n)$ tali che $B = MAN$.

Osservazione 89.

1. $\equiv$ é una relazione di equivalenza.
2. Se $A \equiv B \Rightarrow \text{rk}(A) = \text{rk}(B)$.
3. Interpretando M ed N come matrici di cambiamento di base , $A \equiv B \Leftrightarrow A, B$ rappresentano la stessa applicazione rispetto a basi diverse.

Proposizione 7.6.1. *$f : V \to W$ lineare , $\dim V = n$, $\dim W = p$. Allora esiste una base $\mathcal{S}$ di V ed esiste una base $\mathcal{T}$ di W tali che*

$$m_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(f) = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_r & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right) \tag{7.12}$$

dove $r = \dim \text{Imm} f$.

Dimostrazione. $\dim \ker f = n-r$. Sia $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base di $\ker f$. Sia $\mathcal{S} = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base di V che contiene i vettori $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$. Data la forma della matrice associata ad f il primo vettore della base sará

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\{f(v_1), \dots, f(v_r)\}$ sono generatori di $\mathrm{Imm}f$. Inoltre sono una base perché la lineare indipendenza é garantita dal fatto che $\dim \mathrm{Imm}f = r$. Posso completare questo insieme a $\mathcal{T} = \{f(v_1), \dots, f(v_r), w_{r+1}, \dots, w_p\}$ base di W. Allora $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ verificano la tesi. □

Corollario 7.6.2. *Se* $\mathrm{rk}A = r$ *allora*

$$A \equiv \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_r & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right) \tag{7.13}$$

Teorema 7.6.3. $A \equiv B \Leftrightarrow \mathrm{rk}A = \mathrm{rk}B$ *ovvero il rango é un invariante completo per SD-equivalenza.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$: giá visto
$(\Leftarrow)$: Se $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = r$ allora

$$A \equiv \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_r & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right) \equiv B$$

□

7.7 Ulteriore caratterizzazione del rango

Se $A \in M(p,n)$ denotiamo con $(A_{i_1}, \dots, A_{i_m} | A^{j_1}, \dots, A^{j_q})$ la sottomatrice ottenuta da A scegliendo gli elementi sulle righe $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ e nelle colonne $A^{j_1}, \dots, A^{j_q}$.

Definizione 7.6 (Minori)**.** Le sottomatrici quadrate sono dette minori.

Proposizione 7.7.1. *Sia* $A \in M(p,n)$ *e sia* B *un minore di* A *di ordine* q *, invertibile. Allora le righe (e le colonne) che concorrono a formare* B*, ovvero le righe della matrice originaria da cui si estratto il minore , sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Sia $B = (A_{i_1}, \dots, A_{i_q} | A^{j_1}, \dots, A^{j_q})$. Bisogna mostrare che $A_{i_1}, \dots, A_{i_q}$ sono linearmente indipendenti. $\alpha_1 A_{i_1} + \dots + \alpha_q A_{i_q} = 0$, anche $\alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_q B_q = 0$. Ma le righe di B sono linearmente indipendenti perché $\mathrm{rk}(B) = q$. Dunque $\alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0$. □

Teorema 7.7.2. *Il rango di una matrice é uguale al massimo degli ordini dei suoi minori invertibili.*

Dimostrazione. Sia $A \in M(p,n)$. Sia ρ il massimo degli ordini dei minori invertibili di A. Sia $r = \mathrm{rk}(A)$. Vogliamo provare che $\rho = r$. Sia B un minore di A di ordine ρ invertibile. Allora, per la proposizione (7.7.1) , esistono in A ρ righe indipendenti , quindi $\mathrm{rk}(A) \geq \rho$ ossia $r \geq \rho$. Siano $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$, r righe indipendenti di A. Allora la sottomatrice $r \times n$ data da $B = (A_{i_1}, \dots, A_{i_r} | A^1, \dots, A^n)$ ha rango (per righe) r. Ma allora anche il rango per colonne é r , ovvero esistono in B , r colonne $B^{j_1}, \dots, B^{j_r}$ linearmente indipendenti. Allora la sottomatrice $(B_1, \dots, B_r | B^{j_1}, \dots, B^{j_r})$ ha rango r visto che $B^{j_1}, \dots, B^{j_r}$ sono linearmente indipendenti. Questa matrice é un minore di A ed ha rango r, dunque $\rho \geq r$. Quindi deve valere contemporaneamente $\rho \geq r$ e $\rho \leq r$ ovvero $\rho = r$, come volevasi dimostrare. □

Capitolo 8

Determinante

8.1 Esistenza ed unicitá del determinante

Teorema 8.1.1. $\forall n \geq 1, \exists!$ *funzione* $D : M(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *tale che*

1. *D é lineare in ogni riga , cioé* $\forall i = 1, \ldots, n$

$$D(A_1, \ldots, \lambda B + \mu C, \ldots, A_n) = \lambda D(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n) + \mu D(A_1, \ldots, C, \ldots, A_n)$$

2. *Se A ha due righe uguali , $D(A) = 0$.*

3. *$D(\mathbb{I}_n) = 1$.*

Vediamo che nel caso $n = 2$ una funzione siffatta si puó definire semplicemente come $D : M(2, 2) \to \mathbb{K}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Vediamo che sono verificate le tre proprietá

1. D é lineare nella prima riga (e seconda riga) , ovvero

$$D \begin{pmatrix} \lambda B + \mu C & \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \lambda D \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \mu D \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

con $B = (b_1, b_2) \quad C = (c_1, c_2)$. Verifichiamo quindi la proprietá

$$\begin{aligned} & D \begin{pmatrix} \lambda b_1 + \mu c_1 & \lambda b_2 + \mu c_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \\ & = a_{22}(\lambda b_1 + \mu c_1) - a_{21}(\lambda b_2 + \mu c_2) = \lambda(b_1 a_{22} - a_{21} b_2) + \mu(c_1 a_{22} - c_2 a_{21}) \\ & = \lambda D \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \mu D \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.2}$$

2. $D \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = ab - ba = 0$

3. $D \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

8.1.1 Dimostrazione del teorema (8.1.1)

Unicitá Vogliamo verificare che se c'é una funzione che rispetta le proprietá enunciate nel teorema (8.1.1) allora essa soddisfa anche altre proprietá deducibili da queste tre , che ora elenchiamo.

1. Se A ha una riga nulla allora $D(A) = 0$.
   Dim: Se $A_i = 0$ allora $A = (A_1, \dots, 0 \cdot B, \dots, A_n)$ dove B é una qualsiasi riga possibile. Utilizzando ora la (1) del (8.1.1) segue la tesi
2. $D(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) = -D(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots)$ **Dim**: $0 = D(\dots, A_i{+}A_j, \dots, A_i{+}A_j, \dots) = D(\dots, A_i, \dots, A_i, \dots) + D(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) + D(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots) + D(\dots, A_j, \dots, A_j, \dots) = D(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) + D(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots) = 0$ dove le uguaglianze derivano tutte dalle proprietá del teorema (8.1.1).
3. Se B é ottenuta da A sommando ad una riga una combinazione lineare delle altre righe allora $D(B) = D(A)$. **Dim**: Supponiamo che $B_1 = A_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i A_i$. Allora
   $$D(B) = D(A_1 + \sum_2^n \alpha_i A_i, A_2, \dots, A_n) = D(A) + \sum_{i=2}^n \alpha_i D(A_i, A_2, \dots, A_n)$$
   $\forall i$ in questa matrice ci sono due righe uguali dunque $D(B) = D(A)$.
4. Se le righe di A sono linearmente dipendenti allora $D(A) = 0$. **Dim**: Esiste almeno una riga, ad esempio A_1 , che si puó scrivere come $\sum_{i=2}^n \alpha_i A_i$. Allora
   $$D(A) = D(\sum_2^n \alpha_i A_i, A_2, \dots, A_n) = \sum_{i=2}^n \alpha_i D(A_i, A_2, \dots, A_n) = 0$$
5. Se A é diagonale con $[A]_{ii} = a_i, \forall i = 1, \dots, n$ allora $D(A) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. **Dim**: $D(A) = D(a_1(1, \dots, 0) + a_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot D(\mathbb{I}_n) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$.

Supponiamo che D sia una funzione con le proprietá del teorema (8.1.1) . Vediamo che allora D é univocamente individuata e quindi che al massimo esiste una tale funzione. Sia S una matrice a scalini ottenuta da A attraverso operazioni del primo e del terzo tipo. Abbiamo visto che le prime cambiano il segno di D mentre le seconde lo lasciano inalterato. Quindi
$$D(A) = (-1)^m D(S)$$
dove m é il numero di scambi di riga eseguiti. Dimostriamo che quest'ultima formula soddisfa le proprietá del teorema (8.1.1). Ci sono due casi

1. S ha una riga nulla, quindi $D(S) = 0$ e anche $D(A) = 0$.
2. S ha n pivots $p_1, \dots, p_n$. Con sole operazioni del terzo tipo per riga (che non alterano D) riportiamo S alla forma diagonale su cui D vale $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$. Allora $D(A) = (-1)^m p_1 \cdot \ldots p_n$.

Quindi la funzione assume solo dei valori fissati ed é quindi univocamente determinata : abbiamo provato l'unicitá di D.

Corollario 8.1.2. *Se D é una funzione che verifica le proprietá del teorema (8.1.1) allora $D(A) = 0 \Leftrightarrow$ le righe di A sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. $(\Leftarrow)$: é stato giá provato
$(\Rightarrow)$: Se le righe di A fossero indipendenti ogni ridotta a scalini di S avrebbe n pivots quindi $D(S) = \prod_i p_i \neq 0$ e dunque $D(A) \neq 0$. □

Esistenza Si consideri la funzione $D_n : M(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definita da

- $n = 1 : D_1(a) = a$.
- $n = 2 : D_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.
- $n \geq 2$:
$$D_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} [A]_{i1} D_{n-1}(A_{i1}) \tag{8.3}$$
dove A_{i1} é la sottomatrice di A ottenuta da A cancellando la riga A_i e la colonna A^1.

É una funzione definita ricorsivamente. L'espressione $D_n(A)$ é detto sviluppo di *Laplace* secondo la prima colonna. Si dovrebbe ora verificare che la funzione cosí definita soddisfa gli assioni del teorema (8.1.1).

8.2 Proprietá aggiuntive del determinante

Osservazione 90.
Anche lo sviluppo di Laplace secondo una colonna A^j verifica le proprietá del teorema (8.1.1). Dato che la funzione é unica allora il determinante é uguale, ovvero lo sviluppo di Laplace su qualsiasi colonna é lo stesso in virtú dell'unicitá .

Osservazione 91.
In generale $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ quindi $\det : M(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non é lineare. Inoltre dalla definizione segue $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Teorema 8.2.1 (di Binet)**.** $\forall A, B \in M(n, \mathbb{K}) \Rightarrow \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due casi:

- Se $\det B = 0 \Rightarrow \mathrm{rk}(A \cdot B) \leq \mathrm{rk}(B) < n$ e dunque $A \cdot B$ non é invertibile, ovvero $\det(AB) = 0$.
- Se $\det B \neq 0$ consideriamo la funzione $f : M(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definita da $f(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}$ e verifichiamo che questa soddisfa le proprietá del teorema (8.1.1) : questo ci garantirá che é l'unica e che quindi é la funzione cercata , ovvero $\det(A)$.
  1. f é lineare nelle righe, infatti se una riga di A é combinazione lineare di due righe lo stesso vale anche per $A \cdot B$ e quindi basta sfruttare che det é lineare nelle righe di $A \cdot B$.
  2. Se A ha due righe uguali , anche $A \cdot B$ ce le ha e quindi $\det(AB) = 0$.
  3. $f(\mathbb{I}) = \frac{\det(B)}{\det(B)} = 1$.

□

Corollario 8.2.2. *Se A é invertibile allora*

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det \mathbb{I} = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$$

Osservazione 92.
Consideriamo lo sviluppo di Laplace secondo la prima riga di A.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}[A]_{1i} \det(A_{1i}) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}[\,{}^tA]_{i1} \det(\,{}^t(A_{1i})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}[\,{}^tA]_{i1} \det(\,{}^tA_{i1}) = \det(\,{}^tA) = \det(A)\end{aligned} \tag{8.4}$$

Se si considera poi la rige i-esima, invece della prima, si conclude che si puó fare lo sviluppo di Laplace sulla riga che si preferisce.

Proposizione 8.2.3 (Regola di Cramer)**.** *$Ax = B$ sistema lineare quadrato con $\det(A) \neq 0$. Allora la sua unica soluzione é $(y_1, \ldots, y_n)$ dove*

$$y_i = \frac{\det B(i)}{\det A} \qquad \textit{con } B(i) = (A^1, \ldots, \underbrace{B}_{postoiesimo}, \ldots, A^n)$$

Dimostrazione. $(y_1, \ldots, y_n)$ é soluzione di $Ax = B \Leftrightarrow y_1A^1 + \ldots + y_nA^n = B$. Allora

$$\det B(i) = \det\left(A^1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} y_jA^j, \ldots, A^n\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j \det(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^n) = y_i \det(A) \tag{8.5}$$

poiché $\det(A) \neq 0 \Rightarrow y_i = \frac{\det B(i)}{\det A}$ □

8.2.1 Calcolo dell'inversa

Se A é invertibile allora la matrice B definita da

$$[B]_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{\det A_{ji}}{\det A}$$

é l'inversa di A.

Dimostrazione. Verifichiamo che $AB = \mathbb{I}$.

$$[AB]_{hk} = \sum_{i=1}^{n} [A]_{hi}[B]_{ik} = \sum_{i=1}^{n} [A]_{hi}(-1)^{i+k}\frac{\det A_{ki}}{\det A} \tag{8.6}$$

- Se $h = k$ allora

  $$[AB]_{hh} = \frac{1}{\det A}\sum_{i=1}^{n} [A]_{hi}(-1)^{i+h} \det(A_{hi}) = \frac{\det A}{\det A} = 1$$

  Infatti la formula precedente é lo sviluppo di Laplace secondo la riga h-esima , quindi é uguale a $\det A$.

- Se $h \neq k$ il numeratore é lo sviluppo secondo la riga k-esima di una matrice ottenuta da A sostituendo ad A_k la riga A_h e che quindi ha due righe uguali , quindi $\det A' = 0 \Rightarrow [AB]_{hk} = 0$ per $h \neq k$.

Inoltre $BA = A^{-1}ABA = A^{-1}A = \mathbb{I}$. □

8.3 Risoluzione di sistemi

Consideriamo il sistema lineare $Ax = B, A \in M(p, n)$. Questo sistema é risolubile $\Leftrightarrow$ $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$. Posso controllare la risolubilitá utilizzando il determinante. Supponiamo che $\text{rk}(A) = r = \text{rk}(A|B)$. Se $\text{rk}(A) = r$ esiste nella matrice A un minore M , $r \times r$, invertibile. Allora le equazioni che entrano in M, ovvero le righe della matrice completa che formano M sono linearmente indipendenti. Lo spazio generato dalle righe di $(A|B)$ ha dimensione r : prendendo quindi una riga esterna ad M questa sará combinazione lineare delle righe che concorrono a formare M. Il sistema $Ax = B$ é allora equivalente al sistema ottenuto eliminando le righe di $(A|B)$ che non concorrono a formare M. Si ottiene quindi una matrice rettangolare che ha minore M : posso portare gli altri minori che non formano M nel termine noto. In questo modo la matrice dei coefficienti del sistema diviene M ed abbiamo ottenuto un sistema quadrato dove si puó applicare Cramer.

Definizione 8.1 (Minori orlati)**.** Si ottengono aggiungendo ad un minore di una matrice una riga ed una colonna qualsiasi della matrice.

Proposizione 8.3.1 (Criterio dei minori orlati)**.** *Sia B un minore di ordine r di A con* $\det B \neq 0$. *Se tutti i minori orlati di B hanno determinante nullo allora* $\text{rk}(A) = r$.

Capitolo 9

Endomorfismi

Definizione 9.1 (Endomorfismi)**.** Si definisce endomorfismo $\mathrm{End}(V) = \hom(V, V)$. Sia $\mathcal{S}$ base di V , $A = m_{\mathcal{S}}(f)$. Se $\mathcal{T}$ é un'altra base e $M = m_{\mathcal{T},\mathcal{S}}(\mathrm{id})$ allora $M^{-1} = m_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(\mathrm{id})$. Dunque

$$m_{\mathcal{T}}(f) = M^{-1}AM$$

Definizione 9.2 (f diagonalizzabile)**.** f é detta diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists$ base $\mathcal{B}$ tale che $m_{\mathcal{B}}(f)$ é diagonale.

Definizione 9.3 (Autovettore ed autovalore)**.**

1. $v \in V$ si dice autovettore per f se $v \neq 0$ e $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tale che $f(v) = \lambda v$.
2. $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice autovalore per f se $\exists v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda v$.

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ é una base di autovettori ,

$$m_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(v_i) = \lambda_i v_i, \forall i \tag{9.1}$$

Osservazione 93.
Se v é autovettore per f, $f(\mathrm{Span}(v)) \subset \mathrm{Span}(v)$

- Se $\lambda \neq 0$, $f(\mathrm{Span}(v)) = \mathrm{Span}(v)$.
- Se $\lambda = 0$, $f(\mathrm{Span}(v)) = \{0\}$.

Osservazione 94.
L'autovalore relativo ad un autovettore é univocamente determinato. Infatti se fosse , per assurdo , che $f(v) = \lambda v = \mu v$ allora sarebbe $(\lambda - \mu)v = 0$ e per la definizione di autovettore seguirebbe $\lambda = \mu$ che é assurdo.

Osservazione 95.
v é autovettore relativo a $0 \Leftrightarrow v \in \ker f$, quindi 0 é autovalore $\Leftrightarrow f$ non é iniettiva.

Definizione 9.4 (Autospazio)**.** Poniamo $V(\lambda) = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$. Allora

1. $V(\lambda) = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) \Rightarrow V(\lambda)$ é sottospazio perché $f - \lambda\,\mathrm{id}$ é lineare.

2. λ é autovalore $\Leftrightarrow \dim V(\lambda) \geq 1$. In tal caso $V(\lambda) = \{0\} \cup \{$ autovettori relativi a $\lambda\}$. e $V(\lambda)$ é detto autospazio relativo a λ.

Osservazione 96.
Le nozioni precedenti si applicano anche a $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \to Ax$ dove $A \in M(n, \mathbb{K})$. Ricordiamo che $m_{\mathcal{T}}(A) = A$. Quindi A é diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists$ base $\mathcal{B}$ tale che $m_{\mathcal{B}}(A) = D$ ossia $\Leftrightarrow M^{-1}AM = D$ con $M = m_{\mathcal{B},\mathcal{T}}(\mathrm{id})$.

Definizione 9.5 (Matrici simili)**.** $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ si dicono simili se $\exists M \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che $B = M^{-1}AM$ (e si scrive $A \sim B$).Dunque una matrice é diagonalizzabile se é simile ad una matrice diagonale.

Osservazione 97.

1. La similitudine é una relazione di equivalenza.
2. $A \sim B \Rightarrow A \equiv B$ e quindi $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$ e M é isomorfismo.
3. $A \sim B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$. Infatti $\det B = \det(M^{-1}) \det A \det M = \det A$.

Dunque rango e determinante sono invarianti di similitudine ma NON un sistema completo di invarianti.

Proposizione 9.0.2. *Sia $A \sim B$ e sia λ autovalore per A. Allora*

1. λ é autovalore per B

2. $\dim V(\lambda, A) = \dim V(\lambda, B)$

Dimostrazione. Per ipotesi $\exists M \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che $B = M^{-1}AM$ ed $\exists x \neq 0$ tale che $Ax = \lambda x$. Devo provare che $BY = \lambda Y$. Sia $Y = M^{-1}x$. Allora $Y \neq 0$ (infatti M é isomorfismo , quindi M^{-1} é isomorfismo e quindi manda $x \neq 0$ in $M^{-1}x \neq 0$) e

$$BY = M^{-1}AMM^{-1}x = M^{-1}Ax = \lambda M^{-1}x = \lambda Y$$

Inoltre $\forall x \in V(\lambda, A), M^{-1}x \in V(\lambda, B)$ ovvero $M^{-1}(V(\lambda, A)) \subset V(\lambda, B)$ e quindi $V(\lambda, A) \subset M(V(\lambda, B))$. Analogamente si vede che $M(V(\lambda, B)) \subset V(\lambda, A)$. Ma quindi deve valere che $M(V(\lambda, B)) = V(\lambda, A)$, ovvero M trasforma gli autospazi del primo endomorfismo in autospazi del secondo endomorfismo. Visto che M é un isomorfismo segue subito che $\dim V(\lambda, B) = \dim V(\lambda, A)$. □

Osservazione 98.
Dunque gli autovalori e le dimensioni degli autospazi sono altri invarianti per similitudine.

Proposizione 9.0.3. *Sia $f \sim g$. Allora*[1]

1. Se λ é autovalore per f , λ é autovalore per g.

2. $\dim V_\lambda(f) = \dim V_\lambda(g)$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ base di V , $A = m_{\mathcal{B}}(f), B = m_{\mathcal{B}}(g)$. Allora $A \sim B$. Dunque λ autovalore per $f \Rightarrow \lambda$ autovalore per $A \Rightarrow \lambda$ autovalore per $B \Rightarrow \lambda$ autovalore per g. Inoltre

$$\dim V_\lambda(f) = \dim V_\lambda(A) = \dim V_\lambda(B) = \dim V_\lambda(g)$$

per la proposizione (9.0.2). □

[1] Da ora in avanti si utilizzerá anche la notazione equivalente $V(\lambda, f) = V_\lambda(f)$.

9.1 Calcolo di autovalori e autospazi

Osservazione 99.
λ é autovalore per $A \Leftrightarrow \exists x \neq 0$ tale che $Ax = \lambda x \Leftrightarrow \exists x \neq 0$ tale che $(A - \lambda \mathbb{I})x = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(A - \lambda \mathbb{I} \Leftrightarrow \det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$

Definizione 9.6 (Polinomio Caratteristico)**.** Il polinomio $p_A(t) = \det(A - t\mathbb{I})$ é detto polinomio caratteristico di A. Dunque λ é autovalore per $A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0$

Proposizione 9.1.1. *Se $A \sim B$ allora $p_A(t) = p_B(t)$*

Dimostrazione. Se $A \sim B \Rightarrow B = M^{-1}AM$, quindi $p_B(t) = \det(B - t\mathbb{I}) = \det(M^{-1}AM - t\mathbb{I}) = \det(M^{-1}(A - t\mathbb{I})M) = \det(A - t\mathbb{I}) = p_A(t)$ per Binet. □

Osservazione 100.
Sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Allora $p_f(t) = \det(A - t\mathbb{I})$, dove A é una qualsiasi matrice associata ad f.

Proposizione 9.1.2. *Il polinomio caratteristico é un invariante di similitudine in* $\mathrm{End}(V)$.

Dimostrazione. Se $f \sim g$ e $\mathcal{B}$ é una base di V allora $m_{\mathcal{B}}(f) \sim m_{\mathcal{B}}(g)$ e quindi $p_f(t) = p_g(t)$ per la proposizione precedente. □

Osservazione 101.
Se due matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico $p_A(t) = p_B(t)$ allora

1. hanno gli stessi autovalori
2. $\det(A) = \det(B)$ perché il determinante é il termine noto del polinomio caratteristico.

Inoltre le colonne di A e B generano spazi di dimensione uguale, ovvero $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$. Infatti $\mathrm{rk}(A) = \dim \mathrm{Imm}(A) = n - \dim \ker(A) = n - \dim V_0(A)$. Quindi gli invarianti di similitudine sono

- polinomio caratteristico
- dimensione degli autospazi

Definizione 9.7 (Molteplicitá algebrica e geometrica)**.** Sia λ autovalore per f

1. Si chiama molteplicitá algebrica di λ la sua molteplicitá $\mu_a(\lambda)$ come radice del polinomio caratteristico $p_f(t)$.
2. Si chiama molteplicitá geometrica di λ la dimensione dell'autospazio , ovvero $\mu_g(\lambda) = \dim V_\lambda(f) = n - \mathrm{rk}(A - \lambda\mathbb{I})$.

Osservazione 102.
Il determinante delle matrici triangolari a blocchi si puó calcolare semplicemente come

$$\det \left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline 0 & C \end{array} \right) = \det A \cdot \det C \tag{9.2}$$

con A e C quadrate.

Proposizione 9.1.3.

$$\dim V_\lambda(f) = \mu_g(\lambda) \leq \mu_a(\lambda)$$

Dimostrazione. Sia $d = \dim V_\lambda(f)$, sia $A = m_{\mathcal{B}}(f)$. Sia $\{v_1, \ldots, v_d\}$ una base di $V_\lambda(f)$ che completiamo ad una base $\mathcal{B}$ di V. La matrice associata ad f nella base $\mathcal{B}$ sará quindi del tipo

$$\left(\begin{array}{c:c} \lambda\mathbb{I} & M \\ \hdashline 0 & N \end{array}\right) \tag{9.3}$$

Allora

$$p_A(t) = \det \left(\begin{array}{c:c} (\lambda - t)\mathbb{I} & M \\ \hdashline 0 & N - t \end{array}\right) = (\lambda - t)^d \cdot \det(N - t\mathbb{I}) \tag{9.4}$$

Da cui

$$p_f(t) = \det(A - t\mathbb{I}) = (\lambda - t)^d p_N(t) \Rightarrow \mu_a(\lambda) \geq d \tag{9.5}$$

□

Definizione 9.8. $A \in M(n, \mathbb{K})$ si dice diagonalizzabile se A é simile ad una matrice diagonale.

Osservazione 103.
$f \in \operatorname{End}(V)$, $\mathcal{B}$ base di V. Allora f é diagonalizzabile $\Leftrightarrow m_{\mathcal{B}}(f)$ é diagonalizzabile.

Proposizione 9.1.4. *$f \in \operatorname{End}(V)$, $v_1, \ldots, v_k$ autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Se i λ_i sono a due a due distinti allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Si prova per induzione su k.

- Se $k = 1$ abbiamo un solo autovettore relativo ad un solo autovalore che é ovviamente linearmente indipendente visto che é diverso da 0.

- Sia $k \geq 2$. Prendo
$$c_1v_1 + \ldots + c_kv_k = 0 \tag{9.6}$$
se due vettori sono uguali lo sono anche le loro immagini tramite f. Applico quindi f ottenenendo
$$c_1\lambda_1v_1 + \ldots + c_k\lambda_kv_k = 0$$
. Moltiplicando la 9.6 per λ_1 si ottiene
$$c_1\lambda_1v_1 + \ldots + c_k\lambda_1v_k = 0 \tag{9.7}$$
Sottraendo queste ultime due equazioni si ottiene
$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_1 + \ldots + c_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0$$
Per induzione $c_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \ldots = c_k(\lambda_k - \lambda_1) = 0$. Ma i λ_i sono distinti, quindi $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$. Quindi segue che $c_2 = c_3 = \ldots = c_k = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. □

Teorema 9.1.5 (di diagonalizzazione)**.** *f é diagonalizzabile se e solo se*

1. $\mu_a(\lambda_1) + \ldots + \mu_a(\lambda_k) = n = \dim V$

2. *$\forall\lambda_i$ autovalore $\mu_g(\lambda_i) = \mu_a(\lambda_i)$.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$: Suppongo f diagonalizzabile e $\mathcal{B}$ una base di autovettori. Allora

$$m_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{I}_{d_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathbb{I}_{d_2} & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \lambda_k \mathbb{I}_{d_k} \end{pmatrix} \tag{9.8}$$

Quindi $p_f(t) = (\lambda_1 - t)^{d_1} \dots (\lambda_k - t)^{d_k}$, ovvero $\mu_a(\lambda_1) = d_1, \dots, \mu_a(\lambda_k) = d_k$.Poiché $d_1 + \dots + d_k = n$ la prima parte é provata. Inoltre dato che in $\mathcal{B}$ ci sono almeno d_i autovettori relativi a λ_i , si ha $\dim V_{\lambda_i} \geq d_i = \mu_a(\lambda_i)$. Poiché in generale $\dim V_{\lambda_i} \leq \mu_a(\lambda_i)$ allora anche la seconda parte é provata.
$(\Leftarrow)$: Sia $d_i = \dim V_{\lambda_i}$ e sia $\mathcal{B}_i = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,d_i}\}$ una base di V_{λ_i}. Sia inoltre $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$. In totale $\mathcal{B}$ contiene $d_1 + \dots + d_k = n$ vettori. Per dimostare che questi formano una base basta verificare la lineare indipendenza.

$$\underbrace{c_{11}v_{11} + \dots + c_{1d_1}v_{1d_1}}_{z_1} + \dots + \underbrace{c_{k1}v_{k1} + \dots + c_{kd_k}v_{kd_k}}_{z_k} = 0 \tag{9.9}$$

L'equazione precedente diviene

$$z_1 + z_2 \dots + z_k = 0$$

Dato che z_1 é combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_{1d_1}$, che stavano in un sottospazio, allora $z_1 \in V_{\lambda_1}$ e quindi $z_i \in V_{\lambda_i}, \forall i = 1, \dots, k$. Riguardo a z_1 posso notare che é o 0 o un autovettore. In particolare se $z_1 \neq 0$ sará autovettore e lo stesso vale per gli altri. Ma allora questa relazione sarebbe una combinazione lineare di vettori nulla. Ma questo é assurdo poiché troverei una relazione di dipendenza lineare mentre in realtá si tratta di vettori linearmente indipendenti. Quindi l'unico modo per non incorrere in un assurdo é che

$$z_i = 0, \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow z_1 = 0 \Rightarrow c_{11} \underbrace{v_{11}}_{\neq 0} + \dots + c_{1d_1} \underbrace{v_{1d_1}}_{\neq 0} = 0$$

ovvero $c_{11} = c_{id_i} = \dots = 0, \forall i$. □

Proposizione 9.1.6. $f \in \mathrm{End}(V)$, $\mathcal{S}$ *base di* V , $A = m_{\mathcal{S}}(f)$. *Allora*

1. f *é diagonalizzabile* $\Leftrightarrow$ A *é diagonalizzabile.*

2. λ *é autovalore per* $f \Leftrightarrow \lambda$ *é autovalore per* A.

3. v *é autovettore per* $f \Leftrightarrow x = [v]_{\mathcal{S}}$ *é autovettore per* A.

4. *Se* $\varphi : V \to \mathbb{K}^n$ *isomorfismo indotto da* $\mathcal{S}$ *allora* $\varphi(V(\lambda, f)) = V(\lambda, A)$.

Dimostrazione.
1. f é diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists$ base $\mathcal{B}$ di autovettori $\Leftrightarrow m_{\mathcal{B}}(f) = D \Leftrightarrow M^{-1}AM = D$ con M matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{S} \Leftrightarrow A$ é diagonalizzabile.

2. $\exists v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \exists v \neq 0$ tale che $Av = \lambda v$.

3. Per la definizione di endomorfismo.

4. $[f(v)]_{\mathcal{S}} = \lambda[v]_{\mathcal{S}} \Leftrightarrow x = [v]_{\mathcal{S}} \neq 0$ é tale che $Ax = \lambda x$. Dunque per decidere se f

$\square$

Osservazione 104.
$f \in \mathrm{End}(V)$, $\mathcal{B}$ base di V , $A = m_{\mathcal{B}}(f)$. Sia $\varphi : V \to \mathbb{K}^n$ l'applicazione tale che $v \to [v]_{\mathcal{B}}$. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é una base di $\mathbb{K}^n$ di autovettori per A allora $\{\varphi^{-1}(v_1), \dots, \varphi^{-1}(v_n)\}$ sono una base di autovettori per f.

9.2 Conseguenze del teorema di diagonalizzazione

Osservazione 105.
Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ il polinomio caratteristico ha coefficienti complessi. Per il teorema fondamentale dell'algebra la seconda condizione del teorema (9.1.5) é sempre verificata. Non é detto che lo sia anche la seconda. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ invece puó mancare giá la prima condizione : ad esempio se si prende $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ il polinomio caratteristico associato é $p_A(t) = t^2 + 1$ che non ammette soluzioni in $\mathbb{R}$. Infatti la matrice A rappresenta una rotazione di 90°che non ha sicuramente autovettori. La diagonalizzabilitá é verificata solo in $\mathbb{C}$ dove si trovano gli autovalori $\lambda = \pm\,\mathrm{i}$ distinti. Nella base degli autovettori la matrice si scriverá quindi come $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Osservazione 106.
Se λ é un autovalore *semplice* , ovvero con $\mu_a(\lambda) = 1$, allora $\mu_g(\lambda) \leq \mu_a(\lambda) = 1$. D'altra parte $\mu_g(\lambda) \geq 1$ altrimenti λ non sarebbe autovalore relativo ad un autovettore visto che l'autospazio relativo avrebbe dimensione 0. Se ne deduce quindi che $\mu_g(\lambda) = \mu_a(\lambda) = 1$.

Osservazione 107.
Se $\mathcal{B}_i$ é una base di $V(\lambda_i) = \ker(A - \lambda_i \mathbb{I})$ la lista $\bigcup_i^k \mathcal{B}_i$ é formata da vettori indipendenti.

Osservazione 108.
Se λ é autovalore per A , allora $\forall s \in \mathbb{N}$, λ^s é autovalore per A^s.

Dimostrazione. Se λ é autovalore per A , $\exists x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0$tale che $Ax = \lambda x$. Ma

$$A^s x = A^{s-1}Ax = A^{s-1}\lambda x = \lambda(A^{s-1}x) = \lambda(A^{s-2}Ax) = \ldots = \lambda^s x$$

Ovvero x é autovettore per A^s relativo all'autovalore λ^s. $\square$

Corollario 9.2.1. *Se A é nilpotente , allora A ha solo l'autovalore nullo. Infatti $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $A^m = 0 \Rightarrow \lambda^m = 0 \Rightarrow \lambda = 0$*

Osservazione 109.
Se A é simile a B , allora $\forall s \in \mathbb{N}$, $A^s \sim B^s$.

Dimostrazione. Infatti se $A \sim B$ allora $\exists M \in GL(n)$ tale che $B = M^{-1}AM$. Ma

$$B^s = \underbrace{B \cdot B \ldots B}_{s} = \underbrace{M^{-1}AM \ldots M^{-1}AM}_{s} = M^{-1}AM \cdot M^{-1}AM \ldots M^{-1}AM = M^{-1}A^s M$$

ovvero $B^s \sim A^s$. $\square$

Corollario 9.2.2. *Se A é diagonalizzabile , cioé $A \sim D$ diagonale , allora $\forall s \in \mathbb{N}, A^s \sim D^s$. Infatti D^s é sempre una matrice diagonale$\Rightarrow$ A^s é simile ad una matrice diagonale$\Rightarrow$ A^s é diagonalizzabile. Non vale il viceversa perché ad esempio la rotazione di 90 °non é diagonalizzabile , mentre se si compone 2 o 4 volte, ottenendo 180°o 360°si ottiene una matrice diagonalizzabile.*

Osservazione 110 (Invarianti di similitudine).
Gli invarianti di similitudine esaminati fin'ora risultano essere

1. rango
2. determinante
3. polinomio caratteristico
4. autovalori
5. dimensione autospazi

Notiamo peró che $(3) \Rightarrow (4), (3) \Rightarrow (2), (5) \Rightarrow (1)$, quindi basta controllare la (3) e la (5). Si vede peró che il sistema di invarianti cosí costruito non é completo , infatti basta prendere un controesempio che presentiamo di seguito.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.10}$$

Si noti che $p_A(t) = p_B(t) = t^4$. Inoltre $\dim V(0, A) = \dim V(0, B) = 2$ visto che $\text{rk}(B) = rk(A) = 2$, quindi le matrici sono entrambe non diagonalizzabili. Abbiamo quindi trovato due matrici non diagonalizzabili che soddisfano le proprietá precedenti : per dimostrare che non sono simili utilizzamo una dimosrrazione per assurdo. Se A fosse simile a B allora A^2 sarebbe simile a B^2. Ma $A^2 = 0$ e la matrice B^2 ha almeno un elemento $[B]_{13} \neq 0$. Dato che l'unica matrice simile alla matrice nulla é se stessa segue l'assurdo, ovvero A non é simile a B.

Definizione 9.9. Sia $f \in \text{End}(V)$. W ssv. di V si dice f-invariante se $f(W) \subset W$, ossia $f\Big|_W : W \to W$ é un endomorfismo.

Definizione 9.10. Siano $W_1, \ldots, W_m$ sottospazi vettoriali di V. Si dice che V é somma diretta dei W_i , e si scrive $V = \bigoplus_i W_i$, se $\forall v \in V$, v si puó scrivere in modo unico come $v = w_1 + \ldots + w_m$, con $w_i \in W_i, \forall i$. In particolare, allora,

$$V = W_1 + \ldots + W_m$$

Proposizione 9.2.3. *$V = \bigoplus_{i=1}^m W_i \Leftrightarrow$ prese $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ basi di $W_1, \ldots, W_m$ allora $\bigcup_{i=1}^m \mathcal{B}_i$ é base di V.*

Dimostrazione. .
$(\Rightarrow)$: $\bigcup_{i=1}^m \mathcal{B}_i$ é certamente un insieme di generatori di V : infatti l'ipotesi é che $V = \bigoplus_i W_i$ quindi $v = w_1 + \ldots + w_m, \forall v \in V$ dove $w_1 = \text{Span}\mathcal{B}_1, \ldots, w_m = \text{Span}\mathcal{B}_m$. Inoltre questi vettori sono linearmente indipendenti , infatti presa una combinazione lineare nulla

$$\underbrace{\text{comb.lineare dei vettori di } \mathcal{B}_1}_{w_1} + \ldots + \underbrace{\text{comb.lineare dei vettori di } \mathcal{B}_m}_{w_m} = 0 \tag{9.11}$$

abbiamo scritto 0 come somma di elementi che stanno in $W_1, W_2, \ldots, W_m$. Dato che $0 = 0 + 0 + \ldots + 0$, per l'unicitá della presentazione (dovuta all'ipotesi della somma diretta) si ottiene necessariamente $w_1 = 0, \ldots, w_m = 0$. Ma $w_i, \forall i$ é una combinazione lineare di vettori indipendenti dunque segue che tutti i coefficienti sono nulli e quindi $\bigcup_{i=1}^m \mathcal{B}_i$ é una base di V.
$(\Leftarrow)$: Supponiamo per assurdo che

$$v = w_1 + \ldots + w_m = w_1' + \ldots + w_m' \quad \text{con } w_i \neq w_i', \forall i$$

ovvero che la presentazione NON sia unica. Dunque

$$(w_1 - w_1') + \ldots + (w_m - w_m') = 0$$

Ma $(w_1 - w_1') \in W_1$ quindi puó essere scritto come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}_1$. Lo stesso vale per gli altri vettori : ottengo quindi una combinazione lineare dei vettori che stanno in $\bigcup_{i=1}^m \mathcal{B}_i$. Dato che questa somma deve essere nulla i coefficienti della combinazione lineare sono tutti nulli , infatti per l'ipotesi questi vettori formano una base. Ne segue che $w_1 - w_1' = 0 = \ldots = w_m - w_m' = 0$, ovvero $w_i = w_i'$, da cui l'assurdo. □

Proposizione 9.2.4. *Sia $V = A \oplus B$, $f \in \mathrm{End}(V)$ tale che $f(A) \subset A$, $f(B) \subset B$. Allora f é diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $f\big|_A, f\big|_B$ lo sono.*

Dimostrazione. $(\Leftarrow)$: É ovvia perché $f\big|_A, f\big|_B$ sono diagonalizzabili dunque posso trovare una base di autovettori per f in questi sottospazi. Una base di autovettori per V si ottiene unendo queste due basi.
$(\Rightarrow)$: Per ipotesi esiste una lista di autovettori per f, $\{v_1, \ldots, v_n\}$, base di V tali che $f(v_i) = \lambda_i v_i, \forall i = 1, \ldots, n$. Bisogna cercare una base di autovettori in A ed in B , avendo una base di V. Questa si puó ottenere proiettando i vettori di V nei due sottospazi in somma direta. Consideriamo quindi le applicazioni di proiezione

$$\mathrm{pr}_A : V \to A$$

$$\mathrm{pr}_B : V \to B$$

Per l'unicitá della presentazione , dovuta al fatto che A e B stanno in somma diretta , allora $\forall v \in V, \exists! a \in A, \exists! b \in B$ tali che $v = a+b$, ovvero $\mathrm{pr}_A(v) = a, \mathrm{pr}_B(v) = b$. Quindi $\forall v_i = a_i + b_i$ posso considerare la lista dei vettori $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ottenuta proiettando i vettori della base di autovettori per f in V su A e la lista $\{b_1, \ldots, b_n\}$ ottenuta proiettando i v_i su B. Si ha che

$$f(v_i) = \lambda_i v_i = \lambda_i a_i + \lambda_i b_i$$

d'altra parte

$$f(v_i) = f(a_i + b_i) = f(a_i) + f(b_i)$$

ovvero

$$f(a_i) + f(b_i) = \lambda_i a_i + \lambda_i b_i \tag{9.12}$$

Ma $f(a_i) \in A$ perché A per ipotesi é f-invariante ; la stessa cosa vale anche per $f(b_i) \in B$. Dato che nelle somme dirette un vettore si scrive in modo unico, si ottiene

$$\begin{cases} f(a_i) = \lambda_i a_i \\ f(b_i) = \lambda_i b_i \end{cases} \tag{9.13}$$

Ci sono due possibilitá : o a_i (e analogamente b_i) é nullo per qualche i , o é autovettore. Dunque la lista $\{a_1, \ldots, a_n\}$ contiene certamente una base di A , a patto che questi vettori generino A. Ma $\{a_1, \ldots, a_n\}$ erano le proiezioni su A dei vettori $\{v_1, \ldots, v_n\} \Rightarrow a_1 = \mathrm{pr}_A(v_1), \ldots, a_n = \mathrm{pr}_A(v_n)$. Sappiamo quindi che $a_1, \ldots, a_n$ generano $\mathrm{Imm}(\mathrm{pr}_A)$: per dire che generano anche $\mathrm{Imm}(A)$ basterá che l'applicazione sia surgettiva : ma questo é garantito dalla proprietá della proiezione. Dunque si puó estrarre dagli insiemi $\{a_1, \ldots, a_n\}$, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ una base di autovettori per $f\big|_A, f\big|_B$, ovvero queste restrizioni sono diagonalizzabili. □

Proposizione 9.2.5. *Se f é diagonalizzabile e W é f-invariante , allora $f\big|_W$ é diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Se trovo un ssv. Z di V tale che $V = W \oplus Z$ e che $f(Z) \subset Z$ allora posso applicare la proposizione (9.2.4) e dimostrare quest'ultima. Per ipotesi f é diagonalizzabile , dunque $\exists\{v_1, \ldots, v_n\}$ base di autovettori in V per f .Sia $\{w_1, \ldots, w_k\}$ una base qualunque di W. Posso completarla a base di V scegliendo i vettori aggiuntivi dalla base di V ottenendo la lista $\{w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_n\}$. I primi k vettori sono sicuramente linearmente indipendenti , fra gli altri n l'algoritmo di estrazione di una base selezionerá i vettori indipendenti ottenendo la lista $\{w_1, \ldots, w_k, v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-k}}\}$. Basta quindi prendere come Z lo spazio generato dai vettori $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-k}}\}$: questi vanno in se stessi tramite f per l'ipotesi iniziale di diagonalizzabilitá , quindi Z é f-invariante ed é il complementare di V, ovvero é il candidato adatto per utilizzare la proposizione (9.2.4). □

Corollario 9.2.6. *$f \in \mathrm{End}(V)$ é diagonalizzabile $\Leftrightarrow V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_n}(f) \Leftrightarrow V$ é somma diretta di sottospazi invarianti , su ciascuno dei quali $f = \lambda_i \mathbb{I}$.*

Capitolo 10

Forme Bilineari

Definizione 10.1. V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.
$\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ é detta applicazione (o forma) bilineare se

1. $\forall x, y, z \in V : \phi(x + y, z) = \phi(x, z) + \phi(y, z)$
2. $\forall x, y, z \in V : \phi(x, y + z) = \phi(x, y) + \phi(x, z)$
3. $\forall x, y, z \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \phi(\alpha x, y) = \alpha\phi(x, y) = \phi(x, \alpha y)$.

In generale $\phi : V \times V \ldots \times V \to \mathbb{K}$ é detta multilineare se é lineare in ogni variabile.

Osservazione 111. Presentiamo alcuni esempi di forme bilineari

1. $\phi \equiv 0$ é una forma bilineare , come é semplice verificare.
2. Il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$, $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. É definito da[1]
$$\phi(x, y) = {}^t\, xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
3. $A \in M(n, \mathbb{K})$, in generale si puó dare la seguente definizione di prodotto scalare
$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K} \\ (x, y) &\to {}^t\, xAy \end{aligned} \tag{10.1}$$
4. Il determinante é multilineare nelle righe.
5. $M(n, \mathbb{K}) \quad : \quad \phi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB), \quad \phi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$ sono bilineari.
6. Fissato $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ si considera
$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{K}_n[x] \times \mathbb{K}_n[x] &\to \mathbb{K} \\ \phi(p(x), q(x)) &= \sum_{i=1}^{n} p(a_i)q(a_i) \end{aligned} \tag{10.2}$$

[1] Nel seguito, per non creare fraintendimenti, si indicherá con x un vettore e con x_i la sua componente. La lettera maiuscola sará riservata, come fatto fino ad ora, alle sole matrici.

7. É di grande importanza il prodotto scalare nella metrica di *Minkowski* per la relativitá ristretta. Si definisce su $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare

$$\phi((x_1,\ldots,x_4),(y_1,\ldots,y_4)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

Osservazione 112.

$$\mathrm{Bil}(V) = \{\phi : V \times V \to \phi \text{ é bilineare } \}$$

é un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Definizione 10.2 (Matrice associata alla forma bilineare)**.** $\phi \in \mathrm{Bil}(V), \mathcal{B} = \{v_1,\ldots,v_n\}$ base di V. Si chiama matrice associata a ϕ rispetto a $\mathcal{B}$ la matrice $m_{\mathcal{B}}(\phi) \in M(n,\mathbb{K})$ definita da

$$[m_{\mathcal{B}}(\phi)]_{ij} = \phi(v_i, v_j)$$

Proposizione 10.0.7. *Se* $m_{\mathcal{B}}(\phi) = A$ *allora* $\forall v, w \in V$

$$\phi(v,w) = {}^t\,[v]_{\mathcal{B}} A [w]_{\mathcal{B}} \tag{10.3}$$

Dimostrazione. Calcoliamo direttamente

$$\begin{aligned}\phi(v,w) &= \phi\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i y_j \phi(v_i,v_j) \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i y_j [A]_{ij} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n [\,{}^t x]_i [y]_j [A]_{ij} = {}^t xAy = {}^t\,[v]_{\mathcal{B}} A [w]_{\mathcal{B}}\end{aligned} \tag{10.4}$$

□

Proposizione 10.0.8. $\mathcal{B}$ *base di* V*. L'applicazione*

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{B}} : \mathrm{Bil}(V) &\to M(n,\mathbb{K}) \\ \phi &\to m_{\mathcal{B}}(\phi)\end{aligned} \tag{10.5}$$

é un isomorfismo di spazi vettoriali. In particolare $\dim(\mathrm{Bil}(V)) = n^2$.

10.1 Cambiamenti di base

Sia $\phi \in \mathrm{Bil}(V)$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi di V. Poniamo $A = m_{\mathcal{B}}(\phi), A' = m_{\mathcal{B}'}(\phi)$. Vogliamo determinare la relazione tra A ed A'. Sia M la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, per cui

$$[v]_{\mathcal{B}} = M[v]_{\mathcal{B}'}, \forall v \in V$$

Allora

$$\begin{aligned}\phi(u,v) &= {}^t\,[u]_{\mathcal{B}} A [v]_{\mathcal{B}} = {}^t\,(M[u]_{\mathcal{B}'}) A (M[v]_{\mathcal{B}'}) \\ &= {}^t\,[u]_{\mathcal{B}'} {}^t M A M [v]_{\mathcal{B}'}\end{aligned} \tag{10.6}$$

Ma vale anche

$$\phi(u,v) = {}^t\,[u]_{\mathcal{B}'} A' [v]_{\mathcal{B}'} \tag{10.7}$$

Dunque per ogni scelta di vettori $u, v \in V$ si ottiene

$$^t[u]_{\mathcal{B}'} A'[v]_{\mathcal{B}'} = {}^t [u]_{\mathcal{B}'}^t MAM[v]_{\mathcal{B}'} \Rightarrow {}^t MAM = A' \tag{10.8}$$

Questo non segue semplificando i fattori comuni perché nell'anello delle matrici un prodotto puó essere nullo anche se tutti i fattori sono non nulli. Piuttosto questo segue dal fatto che la relazione deve valere per ogni $u, v \in V$, quindi posso scegliere, in particolare, $u = e_1, v = e_1$. In questo caso applicando la formula (10.8) si ottiene $[A']_{11} = [\ {}^tMAM]_{11}$. Prendendo quindi $u = e_i, v = e_j$ allora si ottiene che $[A']_{ij} = [\ {}^tMAM]_{ij} \Rightarrow {}^t MAM = A'$.

Definizione 10.3 (Congruenza)**.** $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ si dicono congruenti se esiste $M \in GL(n, \mathbb{K})$ tali che $B = {}^t MAM$.

Osservazione 113.
La congruenza é una relazione di equivalenza. Il rango é quindi un invariante di congruenza.

Definizione 10.4 (rango di un prodotto scalare)**.** $\mathrm{rk}(\phi) = \mathrm{rk} m_{\mathcal{B}}(\phi)$ e questa definizione non dipende dalla scelta della base visto che le matrici associate a ϕ sono congruenti, dunque questa definizione é ben posta.

10.2 Prodotti scalari

Definizione 10.5 (Prodotto scalare)**.** Sia $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare. ϕ si dice applicazione bilineare simmetrica (o prodotto scalare) se

$$\phi(v, w) = \phi(w, v), \quad \forall v, w \in V$$

Osservazione 114.
Sia $\mathcal{B}$ base di V , $\phi \in \mathrm{Bil}(V)$. Allora ϕ é prodotto scalare $\Leftrightarrow m_{\mathcal{B}}(\phi)$ é simmetrica.

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$: Se ϕ é un prodotto scalare $[m_{\mathcal{B}}(\phi)]_{ij} = \phi(v_i, v_j)$, ma $[m_{\mathcal{B}}(\phi)]_{ji} = \phi(v_j, v_i)$. Ma per l'ipotesi di prodotto scalare $\phi(v_i, v_j) = \phi(v_j, v_i)$ quindi la matrice é simmetrica.
$(\Leftarrow)$: Se $m_{\mathcal{B}}(\phi)$ é simmetrica allora $[m_{\mathcal{B}}(\phi)]_{ij} = [m_{\mathcal{B}}(\phi)]_{ji} \Rightarrow \phi(v_i, v_j) = \phi(v_j, v_i)$ che é la proprietá caratteristica di un prodotto scalare. □

Osservazione 115.
Se $B = {}^t MAM$ allora A simmetrica $\Rightarrow B$ simmetrica. Infatti ${}^t({}^tMAM) = {}^t M\ {}^tAM = {}^t MAM = B = {}^t B$

Definizione 10.6 (forma quadratica)**.** Se $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ é bilineare , l'applicazione $q : V \to \mathbb{K}$ definita da $q(v) = \phi(v, v), \forall v \in V$ si dice forma quadratica indotta da ϕ.

Definizione 10.7 (Caratteristica)**.** Un campo $\mathbb{K}$ ha caratteristica 0 se $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ volte}} \neq 0$$

Altrimenti $\mathrm{char}(\mathbb{K})$ é il minimo intero positivo n tale che $n \cdot 1 = 0$.

Osservazione 116.
$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ hanno caratteristica 0. $\mathrm{char}\mathbb{Z}_2 = 2$.

Da ora in poi supporremo $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$.

Proposizione 10.2.1. *q forma quadatica su V. Allora esiste uno ed un solo prodotto scalare che induce q.*

Dimostrazione. Per definizione $\exists \phi \in \mathrm{Bil}(V)$ tale che $q(v) = \phi(v,v), \forall v$. Definisco

$$\phi'(u,v) = \frac{\phi(u,v) + \phi(v,u)}{2}$$

Questa forma bilineare é simmetrica e induce q , infatti $\phi'(v,v) = \frac{\phi(v,v)+\phi(v,v)}{2} = \phi(v,v)$. Dobbiamo provare l'unicitá. Se trovo un prodotto scalare che induce q e riesco a scriverlo in termini della stessa q allora questo sará unico. Supponiamo quindi che ϕ sia un prodotto scalare che induce q. Calcoliamo

$$\begin{aligned} q(u+v) - q(u) - q(v) &= \phi(u+v, u+v) - \phi(u,u) - \phi(v,v) = \\ &= \phi(u,u) + \phi(v,v) + \phi(u,v) + \phi(v,u) - \phi(u,u) - \phi(v,v) = 2\phi(u,v) \\ &\Rightarrow \phi(u,v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2} \end{aligned} \tag{10.9}$$

L'ultima relazione della (10.9) é detta formula di polarizzazione. Ho scritto quindi ϕ , che definisce il prodotto scalare, in funzione di q , quindi segue l'unicitá di ϕ. □

Definizione 10.8 (prodotto scalare non degenere)**.** Sia ϕ prodotto scalare. ϕ si dice non degenere se

$$\phi(v,w) = 0, \quad \forall w \in V \Rightarrow v = 0$$

Teorema 10.2.2. *ϕ prodotto scalare. Sono fatti equivalenti*

1. $\mathrm{rk}(\phi) = n$ *con* $n = \dim(V)$.
2. *ϕ é non degenere*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base di V. $A = m_{\mathcal{B}}(\phi)$.
$(1 \Rightarrow 2)$: Per ipotesi $\det A \neq 0$. Sia $v \in V$ tale che $\phi(v,w) = 0, \forall w$. Se denoto $x = [v]_{\mathcal{B}}$ e $y = [w]_{\mathcal{B}}$ allora $\phi(v,w) = {}^t\, xAy = 0, \forall y$. Dunque ${}^t xA$ é una riga che moltiplicata per una colonna fa 0 , ovvero puó essere solo la riga nulla : ${}^t xA = 0 \Rightarrow {}^t\ ({}^t xA) = {}^t\ Ax = Ax = 0$. Poiché A é invertibile deduco che $x = 0$, ovvero $v = 0$ e ϕ é non degenere.
$(2 \Rightarrow 1)$: Supponiamo per assurdo che $\det A = 0$. Allora $\exists x \neq 0$ tale che $Ax = 0$, ossia ${}^t xA = 0$. Ma allora ${}^t xAy = 0, \forall y$ che é assurdo perché troverei un vettore diverso da 0 che rende nullo questo prodotto. □

Definizione 10.9 (vettori ortogonali)**.** ϕ prodotto scalare. I vettori $u, v \in V$ si dicono ortogonali rispetto a ϕ se $\phi(u,v) = 0$.

Definizione 10.10 (sottoinsieme ortogonale)**.** S sottoinsieme di V. Denotiamo con

$$S^{\perp} = \{v \in V : \phi(v,s) = 0, \forall s \in S\}$$

il sottoinsieme ortogonale di V.

Proposizione 10.2.3. *Presentiamo alcune proprietá del sottoinsieme ortogonale.*

1. *$S^{\perp}$ é un ssv. di V , detto ortogonale di S.*

2. *$S \subset T \Rightarrow T^{\perp} \subset S^{\perp}$. Infatti se prendo $t \in T^{\perp}$ allora t é ortogonale a tutti i vettori di T. Ma dato che $S \subset T$ sará ortogonale anche a tutti i vettori di S, dunque $T^{\perp} \subset S^{\perp}$.*

3. $S^{\perp} = (\mathrm{Span} S)^{\perp}$

4. $S \subset S^{\perp\perp}$

Definizione 10.11 (radicale)**.** In particolare $V^{\perp} = \{v \in V : \phi(v, w) = 0, \forall w \in V\}$. $V^{\perp}$ é detto il radicale di V rispetto a ϕ. Abbiamo provato che ϕ é non degenere $\Leftrightarrow V^{\perp} = \{0\}$.

Proposizione 10.2.4.

$$\dim V^{\perp} = n - \mathrm{rk}(\phi)$$

Dimostrazione. $v \in V^{\perp} \Leftrightarrow \phi(v, w) = 0, \forall w \in V$. Se $\mathcal{B}$ é una base di V , $A = m_{\mathcal{B}}(\phi)$, $x = [v]_{\mathcal{B}}, y = [w]_{\mathcal{B}}$ allora $v \in V^{\perp} \Leftrightarrow \phi(v, w) = 0 \Leftrightarrow {}^t\, xAy = 0, \forall y \in \mathbb{K}^n \Leftrightarrow {}^t\, xA = 0 \Rightarrow Ax = 0$. Quindi le coordinate dei vettori che stanno nel radicale soddisfano il sistema lineare $Ax = 0$. Dunque

$$v \in V^{\perp} \Leftrightarrow x = [v]_{\mathcal{B}} \in \{ \text{ Soluzioni } Ax = 0\} = S_0$$

. Poiché il passaggio in coordinate é un isomorfismo si ha

$$\dim V^{\perp} = \dim S_0 = n - \mathrm{rk}(A) = n - \mathrm{rk}(\phi)$$

□

Osservazione 117. Osserviamo che le le proposizioni ϕ non degenere e $\phi\big|_W$ non degenere non sono collegate tra di loro. Infatti prendiamo ad esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é non degenere. Ma $\phi\big|_{\mathrm{Span}(e_1)} = 0$ che é degenere. Per l'implicazione inversa basta prendere $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ma $\phi\big|_{\mathrm{Span}(e_1)}$ é non degenere mentre ϕ é degenere perché $\det m_{\mathcal{B}}(\phi) = 0$

Proposizione 10.2.5. *ϕ prodotto scalare su V , $\dim V = n$. W sottospazio vettoriale di V. Allora*

1. $\dim W^{\perp} \geq n - \dim W$

2. *Se ϕ é non degenere, allora* $\dim W^{\perp} = n - \dim W$ *ma in generale $V \neq W \oplus W^{\perp}$.*

3. *Se $\phi\big|_W$ é non degenere , allora $V = W \oplus W^{\perp}$ e quindi in particolare* $\dim W^{\perp} = n - \dim W$.

Dimostrazione. .

1. Sia $\{w_1, \ldots, w_p\}$ una base di W , cioé $\dim W = p$. Completiamo a base $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_p, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ di V. Sia ora $m_{\mathcal{B}}(\phi) = A$. Si ha che

$$W^{\perp} = \{v \in V : \phi(w, v) = 0, \forall w \in W\} = \{v \in V : \phi(w_1, v) = \phi(w_2, v) = \ldots = \phi(w_p, v) = 0\}$$

per la bilinearitá. Quindi

$$\begin{cases} \phi(w_1, v) = \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{{}^t[w_1]_{\mathcal{B}}} Ax \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi(w_p, v) = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{{}^t[w_p]_{\mathcal{B}}} Ax \end{cases} \tag{10.10}$$

come giá fatto nella dimostrazione del teorema (10.2.2) e della proposizione (10.2.4). Quindi gli elementi di $W^\perp$ sono dati dalle soluzioni del sistema lineare

$$\underbrace{\left(\mathbb{I}_p \middle| 0\right) A}_{B} x = 0 \Rightarrow Bx = 0 \tag{10.11}$$

Devo dimostrare quindi che dim(spazio soluzioni $Bx = 0$) $= \dim W^\perp = n - \mathrm{rk}(B)$. Ma $\mathrm{rk}(B) \leq \min\{\mathrm{rk}(\mathbb{I}_p), \mathrm{rk}(A)\} \Rightarrow \mathrm{rk}(B) \leq p$, allora $\dim W^\perp \geq n - p$.

2. Se ϕ é non degenere allora A ha rango massimo, $\det(A) \neq 0$, quindi $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(\mathbb{I}_p) = p$ dato che A ha rango massimo , quindi $\dim W^\perp = n - p$.

3. Se $\phi\big|_W$ é non degenere $A = \left(\begin{array}{c:c} F & G \\ \hdashline H & L \end{array}\right)$ con $F = m_{\mathcal{B}}(\phi\big|_W)$; infatti i primi p vettori di $\mathcal{B}$ sono base di W. Dunque $\det F \neq 0$, quindi

$$B = \left(\mathbb{I}_p \middle| 0\right) \left(\begin{array}{c:c} F & G \\ \hdashline H & L \end{array}\right) = \left(F \middle| G\right)$$

Ma dato che F ha rango p allora $\mathrm{rk}(B) = p$ e dunque $\dim W^\perp = n-p$. In piú $W \cap W^\perp = \{0\}$ perché se $v \in W \cap W^\perp$ allora v sta nello spazio nullo di $\phi\big|_W$ che é $\{0\}$. Infatti v dovrebbe appartenere sia a W che a $W^\perp$ quindi, in particolare, $\phi(v, v) = 0$, ma questo assurdo visto che la restrizione del prodotto scalare non degenere quindi deve essere necessariamente $v = 0$.

□

Osservazione 118.

1. Se ϕ é non degenere , allora $W = W^{\perp^\perp}$.
2. $W^\perp \cap U^\perp = (W + U)^\perp$
3. $(W \cap U)^\perp \supset W^\perp + U^\perp$
4. Se ϕ é non degenere allora $(W \cap U)^\perp = W^\perp + U^\perp$.

Definizione 10.12. Se $V = W_1 \oplus W_2$ e $\forall x \in W_1, \forall y \in W_2 : \phi(x, y) = 0$ si scrive anche $V = W_1 \perp W_2$, oppure $V = W_1 \overset{\perp}{\oplus} W_2$

Definizione 10.13 (proiezione ortogonale)**.** Se $V = W \oplus W^{\perp}$, la proiezione $\mathrm{pr}_W : V \to W$ é detta proiezione ortogonale : $\forall v \in V$, $v - \mathrm{pr}_W(v) \in W^{\perp}$. Quindi

$$v = \mathrm{pr}_W(v) + \mathrm{pr}_{W^{\perp}}(v)$$

Definizione 10.14 (vettori isotropi)**.** $v \in V$ si dice isotropo se $\phi(v, v) = 0$.

Osservazione 119.
Prendiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \phi(x, y) = {}^t\, xAy$$

Quindi

$$\text{vettori isotropi} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 - y^2 = 0 \right\} = \text{bisettrici dei quadranti}$$

In generale l'insieme dei vettori isotropi non é un sottospazio di V, come si vede da questo esempio.

Osservazione 120.
Se ogni $v \in V$ é isotropo allora $\phi = 0$. Infatti

$$\phi(u, v) = \frac{-\phi(u, u) - \phi(v, v) + \phi(u + v, u + v)}{2} = 0$$

per la formula di polarizzazione

Osservazione 121.
Se v non é isotropo $\phi\big|_{\mathrm{Span}(v)}$ é non degenere , dunque $V = \mathrm{Span}(v) \oplus (\mathrm{Span}(v))^{\perp}$. Infatti la matrice associata al prodotto scalare nella base $\mathcal{B} = \{v, \ldots\}$ ha un elemento non nullo nel posto 11 , quindi $\phi\big|_{\mathrm{Span}(v)} \neq 0$ ovvero é non degenere. In questo caso é quindi definita la sua proiezione ortogonale su $\mathrm{Span}(v)$.

Proposizione 10.2.6. *Sia $v \in V$ non isotropo. $\forall w \in V$. Sia*

$$c = \frac{\phi(v, w)}{\phi(v, v)}$$

detto coefficiente di Fourier di w rispetto a v. Allora $w - cv \in (\mathrm{Span}(v))^{\perp}$, quindi é la proiezione ortogonale.

Dimostrazione. Basta osservare che

$$\phi(v, w - cv) = \phi(v, w) - c\phi(v, v) = \phi(v, w) - \phi(v, w) = 0$$

Quindi $w - cv$ é ortogonale a v. □

Dunque $\forall w \in V, w = cv + (w - cv) \quad , cv \in \mathrm{Span}(v), (w - cv) \in (\mathrm{Span}(v))^{\perp}$ e quindi

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{Span}(v)}(w) = \frac{\phi(v, w)}{\phi(v, v)} v$$

10.3 Diagonalizzazione di prodotti scalari

Definizione 10.15 (base ortogonale)**.** Sia ϕ un prodotto scalare su V , $\dim V = n$. Una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V si dice ortogonale se $\phi(v_i, v_j) = 0, \forall i \neq j$.

Osservazione 122.
$\mathcal{B}$ ortogonale $\Leftrightarrow m_{\mathcal{B}}(\phi)$ é diagonale.

Teorema 10.3.1. *Per ogni prodotto scalare ϕ , esiste una base di V , ortogonale rispetto a ϕ.*

Dimostrazione. Presentiamo due dimostrazioni alternative.

Dimostrazione 1 Proviamo il teorema per induzione su $n = \dim V$. Per $n = 1$ é sicuramente vero perché una matrice 1×1 é sempre diagonale. Supponiamola vera quindi per $n - 1$ e proviamo la tesi per n. Sia $\dim V = n > 1$. Distinguiamo due casi

- $\forall v \in V, \phi(v, v) = 0$. Dunque il prodotto scalare é quello nullo. Quindi ogni base é ortogonale.
- $\exists v_1 \neq 0$ tale che $\phi(v_1, v_1) \neq 0$. In questo caso abbiamo provato che

$$V = \mathrm{Span}(v_1) \oplus (\mathrm{Span}(v_1))^{\perp} \Rightarrow \dim(\mathrm{Span}(v_1))^{\perp} = n - 1$$

Per ipotesi induttiva dunque $\phi\big|_{\mathrm{Span}(v_1)^{\perp}}$ ammette come base ortogonale $\{v_2, \dots, v_n\} \subset (\mathrm{Span}(v_1))^{\perp}$. Si puó quindi completare a base di V aggiungendo $v_1 : \{v_1, \dots, v_n\}$. Questi vettori sono indipendenti e sono anche ortogonali : infatti $v_1 \in \mathrm{Span}(v_1)$ e $v_2, \dots, v_n \in (\mathrm{Span}(v_1))^{\perp}$ dunque sono sicuramente ortogonali.

Dimostrazione 2 Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base qualsiasi di V. Sia $A = (a_{ij})$ la matrice associata al prodotto scalare in tale base. Si procede secondo il seguente algoritmo per ortogonalizzare la base : si presentano due scelte

Trasformazioni di base Si applica se $\phi(v_1, v_1) = a_{11} \neq 0$, ovvero se v_1 é non isotropo. In questo caso consideriamo i vettori

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 \\ v_2' &= v_2 - \frac{\phi(v_2, v_1)}{\phi(v_1, v_1)} v_1 \\ &\vdots \\ v_n' &= v_n - \frac{\phi(v_n, v_1)}{\phi(v_1, v_1)} v_1 \end{aligned} \tag{10.12}$$

Questa é sicuramente una base di V. Si noti infatti che si tratta di una lista composta da n vettori in uno spazio dove si conosce giá la base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Dunque la nuova lista di vettori é composta da vettori indipendenti solo se i vettori delle coordinate rispetto ai vettori di $\mathcal{B}$ sono indipendenti. La matrice costruita con queste coordinate é del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\phi(v_2,v_1)}{\phi(v_1,v_1)} & \dots & \dots & \frac{\phi(v_n,v_1)}{\phi(v_1,v_1)} \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & \dots & 1 & * & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{10.13}$$

quindi il rango é massimo ed i vettori sono linearmente indipendenti. Questa base é anche ortogonale , infatti ha la proprietá che

$$\phi(v_1', v_j') = 0 \quad , \forall j = 2, \dots, n$$

Quindi la matrice associata a ϕ diventa

$$\left(\begin{array}{c:c} a_{11} & 0 \\ \hdashline 0 & B \end{array}\right) \tag{10.14}$$

e posso iterare il procedimento sulla matrice B.

Trasformazioni ausiliarie Si applicano nel caso che $a_{11} = 0$. Ci sono due casi

Prime trasformazioni ausiliarie : Se $a_{ii} = 0$ ed $\exists i$ tale che $a_{ii} \neq 0$ si permutano i vettori della base $\{v_1, \dots, v_n\}$ per portare v_i al primo posto e poi si usa la trasformazione di base.

Seconde trasformazioni ausialiarie : Si applica quando $a_{ii} = 0, \forall i$ ma $A \neq 0$. Allora $\exists i, \exists j$ tali che $a_{ij} \neq 0$ (e quindi $a_{ji} \neq 0$) . Si puó prendere quindi la combinazione

$$\phi(v_i+v_j, v_i+v_j) = \phi(v_i, v_i)+\phi(v_j, v_j)+\phi(v_i, v_j)+\phi(v_j, v_i) = 0+2a_{ij}+0 = 2a_{ij} \neq 0$$

Basta allora prendere una base di cui $v_i + v_j$ é il primo vettore.

□

Corollario 10.3.2. *Ogni matrice simmetrica é congruente ad una matrice diagonale.*

Osservazione 123.
Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di V. Quindi $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Se v_1 non é isotropo allora $\phi(v, v_1) = \alpha_1 \phi(v_1, v_1)$ per l'ipotesi di ortogonalitá della base $\mathcal{B}$. Quindi

$$\alpha_1 = \frac{\phi(v, v_1)}{\phi(v_1, v_1)} = \text{coeff. di Fourier di } v \text{ rispetto a } v_1$$

Teorema 10.3.3 (di Sylvester complesso)**.** *Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sia inoltre V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale e $\langle , \rangle$ un prodotto scalare. Allora esiste una base di V in cui la matrice associata a $\langle , \rangle$ é*

$$D = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_r & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right) \tag{10.15}$$

dove r é il rango di $\langle , \rangle$.

Dimostrazione. Sappiamo che $\exists$ una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonale per $\langle\rangle$. Quindi la matrice associata é del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & a_{rr} & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & 0 \end{pmatrix} \tag{10.16}$$

Per far comparire degli 1 sulla diagonale basta normalizzare i vettori di base , ovvero prendere la base

$$\left\{ \frac{v_1}{\sqrt{a_{11}}}, \ldots, \frac{v_r}{\sqrt{a_{rr}}}, v_{r+1}, \ldots, v_n \right\}$$

che ha le proprietá richieste. □

Corollario 10.3.4. *Due matrici simmetriche complesse sono congruenti $\Leftrightarrow$ hanno lo stesso rango.*

10.4 Forme quadratiche reali

Teorema 10.4.1 (di Sylvester reale)**.** *Sia V , $\mathbb{R}$-spazio vettoriale , $\langle\rangle$ prodotto scalare su V. Sia r il rango di $\langle\rangle$. Allora esiste un numero intero non negativo $p \leq r$, dipendente solo da $\langle\rangle$, e una base di V in cui la matrice associata a $\langle\rangle$ é*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.17}$$

Dimostrazione. In una base ortogonale a $\{v_1, \ldots, v_n\}$ la matrice é uguale alla (10.16). Riordinando la base si puó supporre che

- $a_{ii} > 0$, $1 \leq i \leq p$.
- $a_{ii} < 0$, $p + 1 \leq i \leq r$.

Allora , rispetto alla base

$$\left\{ \frac{v_1}{\sqrt{a_{11}}}, \ldots, \frac{v_p}{\sqrt{a_{pp}}}, \frac{v_{p+1}}{\sqrt{-a_{p+1,p+1}}}, \ldots, \frac{v_r}{\sqrt{-a_{rr}}}, v_{r+1}, \ldots, v_n \right\} = \{z_1, \ldots, z_p, z_{p+1}, \ldots, z_r, \ldots, z_n\}$$

la matrice é del tipo voluto. Resta da dimostrare che p non dipende dalla base scelta ma solo dal prodotto scalare. Per fare ció esprimo p in modo indipendente dalla base, come quantitá intrinseca. Sia $p_\phi = \{$ massima dimensione di un sottospazio vettoriale W di V su cui $\phi\big|_W$ é definito positivo, ossia[2] $\forall w \in W, w \neq 0, \phi(w, w) > 0\}$. Basta allora provare che $p = p_\phi$.

1. poiché su Span $\left(\frac{v_1}{\sqrt{a_{11}}}, \ldots, \frac{v_p}{\sqrt{a_{pp}}} \right)$, ϕ é definito positivo allora $p_\phi \geq p$.

[2]Conviene considerare questa proprietá solo nei prodotti scalari definiti su campi con ordinamento.

2. Sia W un sottospazio vettoriale di V tale che $\phi\big|_W$ é definito positivo e $\dim W = p_\phi$. Sia ora

$$Z = \text{Span}(z_{p+1}, \ldots, z_r, \ldots z_n)$$

Dico che $W \cap Z = \{0\}$, infatti se per assurdo esistesse $v \neq 0, v \in W \cap Z$ allora $v \in W \Rightarrow \phi(v,v) > 0$ visto che il prodotto scalare é definito positivo. Ma se $v \in Z$ allora $v = c_{p+1}z_{p+1} + \ldots + c_n z_n \Rightarrow \phi(v,v) = c_{p+1}^2 \phi(z_{p+1}, z_{p+1}) + \ldots + c_n^2 \phi(z_n, z_n) \leq 0$ visto che $\phi(z_i, z_j) \leq 0, \forall i, j$. Ma questo é assurdo , quindi deve valere necessariamente $W \cap Z = \{0\}$ dunque $W \oplus Z \subset V$ e quindi $n \geq p_\phi + n - p$ da cui $p \geq p_\phi$.

□

Facciamo un riassunto delle nozioni scoperte fino ad ora.

Riassunto

Sia $V, \mathbb{K}$-spazio vettoriale ; ϕ prodotto scalare su V.

1. $\exists \mathcal{B}$ base di V tale che $m_\mathcal{B}(\phi)$ é diagonale , infatti basta prendere vettori ortogonali in ϕ.

2. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\text{rk}(\phi) = r$, $\exists \quad \mathcal{B}$ tale che $m_\mathcal{B}(\phi) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, dipendente solo da ϕ , $\exists \mathcal{B}$ base tale che $m_\mathcal{B}(\phi) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Versione matriciale

$A \in M(n, \mathbb{K})$ simmetrica associata al prodotto scalare $(x, y) \rightarrow {}^t\, xAy$

1. A é congruente ad una matrice diagonale visto che si puó prendere una base ortogonale e diagonalizzare il prodotto scalare.

2. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A é congruente alla matrice $\begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi nella classe di congruenza di A c'é sempre questo rappresentante. Dunque A e B sono congruenti $\Leftrightarrow \text{rk}(A) = \text{rk}(B)$ visto che devono essere entrambe congruenti alla matrice $\begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A é congruente ad una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo rappresentante della classe di congruenza é unico perché p dipende solo dal prodotto scalare

10.5 Calcolo della segnatura

Definizione 10.16 (Segnatura)**.** Denoteremo con

- $i_+(\phi) = p =$ massima dimensione dei sottospazi W di V sui quali $\phi\big|_W$ é definita positiva=indice di positivitá di ϕ.
- $i_-(\phi) = r - p$ =indice di negativitá
- $i_0(\phi) = n - r = \dim V^\perp$ =indice di nullitá

La terna $\sigma(\phi) = (i_+, i_-, i_0)$ é detta segnatura di ϕ.

Osservazione 124.

- $i_+ + i_- + i_0 = n = \dim V$
- $i_+ + i_- = \mathrm{rk}(\phi) = r$

Osservazione 125.
A e B sono congruenti $\Leftrightarrow$ A e B hanno la stessa segnatura con A e B matrici simmetriche reali. Dunque la segnatura é un invariante completa per congruenza se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Osservazione 126.
Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ c'é un altro invariante. Supponiamo che $B = {}^t\, MAM \quad , M \in GL(n)$. Dunque

$$\det(B) = \det(A) \cdot \det(M)^2$$

per Binet. Quindi $\mathrm{sgn}(\det B) = \mathrm{sgn}(\det A)$, ovvero il segno del determinante é un invariante di congruenza per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Osservazione 127.
ϕ definito positivo $\Rightarrow$ ϕ non degenere. Infatti se $v \in V^\perp \Rightarrow \phi(v, w) = 0, \forall w \in V, v \neq 0$. Quindi in particolare $\phi(v, v) = 0$ che contrasta con l'ipotesi di prodotto scalare definito positivo.

Osservazione 128.
Se ϕ é definito positivo allora $\forall W$ sottospazio vettoriale di V $\phi\big|_W$ é definito positivo. Infatti dovrei mostrare che $\forall w \in W, w \neq 0 \Rightarrow \phi(w, w) > 0$. Ma $w \in V$ per la definizione di inclusione tra insiemi e quindi se ϕ é definito positivo su V allora $\phi(w, w) > 0 \Rightarrow \phi\big|_W$ é definito positivo.

Osservazione 129.
Vediamo un esercizio per illustrare la procedura per calcolare la segnatura di un prodotto scalare. Prendiamo la matrice $A = m_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$: questa rappresenta un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$. Dato che $a = \phi(e_1, e_1)$ allora per avere un prodotto scalare definito positivo deve essere $\phi(e_1, e_1) > 0$. Analogamente quindi $c = \phi(e_2, e_2) > 0$. Questa é una condizione necessaria ma non sufficiente , quindi vediamo se esistono altre proprietá interessanti. Si osservi che se il prodotto scalare fosse definito positivo allora la matrice $m_{\mathcal{B}}(\phi)$ sarebbe congruente ad una del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dato che la segnatura é (2,0,0). Dato che si deve conservare il segno del determinante deve essere necessariamente $ac - b^2 > 0 \Rightarrow b^2 < ac$. Abbiamo quindi trovato le condizioni

$$\begin{cases} \phi(e_1, e_1) > 0 \\ b^2 < ac \\ \phi(e_2, e_2) > 0 \end{cases} \Leftarrow \phi \text{ definito positivo} \tag{10.18}$$

Vediamo se vale anche il viceversa, ovvero se queste condizioni si possono considerare sufficienti. Poiché $ac - b^2 \neq 0 \Rightarrow i_0 = 0$. Inoltre $a = m\left(\phi|_{\text{Span}(e_1)}\right) \Rightarrow \phi|_{\text{Span}(e_1)}$ é definito positivo$\Rightarrow i_+(\phi) \geq 1$. Le possibilitá per scegliere i_+ (dopo questa scelta i_- é univocamente determinato) sono quindi $i_+(\phi) = 1, 2$. Se fosse $i_+(\phi) = 1$, A sarebbe congruente ad una matrice del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ che ha determinante negativo. Se invece $i_+(\phi) = 2, A$ sarebbe congruente ad una matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ che ha determinante positivo. Ma dato che $\det(A) > 0$ deve valere necessariamente $i_+(\phi) = 2$ e quindi $\sigma(\phi) = (2, 0, 0)$.

Definizione 10.17. $A \in M(n, \mathbb{R})$ si dice definita positiva se il prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$, $(x, y) \to {}^t\, xAy$ é definito positivo.

Proposizione 10.5.1. *Sono fatti equivalenti*

1. *A é definita positiva*

2. *$\exists N \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che $A = {}^t\, NN$*

3. *$\forall i = 1, \ldots, n, D_i > 0$ dove D_i é il determinante di M_i ed M_i sono i minori principali di A costruiti scegliendo le prime i righe e i colonne.*

Dimostrazione. .
(1) $\Rightarrow$ (2) infatti se A é definita positiva allora $i_+(\phi) = n, i_-(\phi) = i_0(\phi) = 0$. Dunque A é congruente all'identitá che é la tesi contenuta nella (2).
(1) $\Rightarrow$ (3) : devo dimostrare che $\det(M_i) > 0 \quad \forall i$. Si ha $\det(M_1) = \phi|_{\text{Span}(e_1)} > 0$. Inoltre $\det(M_n) = \det(A) > 0$ visto che A é definita positiva. Ma allora anche $\det(M_i) > 0$, infatti le matrici M_i rappresentano le restrizioni a qualsiasi sottospazio del prodotto scalare ϕ e queste continuano ad essere non degeneri (vedi osservazione 127) , quindi $D_i > 0, \forall i$. □

10.6 Spazi euclidei

Definizione 10.18. Si chiama spazio euclideo ogni sottospazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare definito positivo.

Definizione 10.19 (norma)**.** Sia (V, ϕ) euclideo. La funzione

$$\begin{aligned} ||.|| : V &\to \mathbb{R} \\ v &\to ||v|| = \sqrt{\phi(v, v)} \end{aligned} \tag{10.19}$$

é detta norma.

Proposizione 10.6.1. *Valgono le proprietá*

1. $||v|| \geq 0, \forall v \in V$ *e* $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

2. $\lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V, ||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$

3. $\forall v, w \in V \quad |\phi(v, w) \leq ||v|| \cdot ||w||$ *: diseguaglianza di Schwarz*

4. $\forall v, w \in V \quad ||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ *: diseguaglianza triangolare*

Dimostrazione. La prima e la seconda sono ovvie
(3) : Se $v = 0$ o $w = 0$ vale. Se invece $v \neq 0$ o $w \neq 0$ allora

$$\phi(tv + w, tv + w) \geq 0 \Rightarrow t^2\phi(v, v) + 2t\phi(v, w) + \phi(w, w) \geq 0 \forall t$$

Quindi il discriminante di questa equazione deve essere non positivo

$$\frac{\Delta}{4} = \phi(v, w)^2 - \phi(v, v)\phi(w, w) \leq 0 \Rightarrow \phi(v, w)^2 \leq ||v||^2 \cdot ||w||^2$$

che é la tesi al quadrato.
(4) : segue dalla (3) □

Definizione 10.20 (distanza)**.** Sia

$$\begin{aligned} d : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to ||x - y|| \end{aligned} \tag{10.20}$$

La funzione d é detta distanza ed ha le proprietá

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in V$

Osservazione 130.

1. In uno spazio euclideo non esistono vettori isotropi e non nulli.
2. prodotto scalare definito positivo implica prodotto scalare non degenere
3. Se ϕ é definito positivo , $\forall$ sottospazio W , $\phi\big|_W$ é definito positivo. Ma allora $W \oplus W^\perp$ ed esistono le proiezioni ortogonali
$$\text{pr}_W : V \to W \quad \text{pr}_{W^\perp} : V \to W^\perp$$
Se $\{w_1, \ldots, w_k\}$ é base ortogonale di W ,$\{w_{k+1}, \ldots, w_n\}$ é base ortogonale di $W^\perp$, allora
$$\{w_1, \ldots, w_k, \ldots, w_n\}$$
é base ortogonale di V. Dunque $\forall v \in V$ si ha
$$v = \frac{\phi(v, w_1)}{\phi(w_1, w_1)}w_1 + \ldots + \frac{\phi(v, w_n)}{\phi(w_n, w_n)}w_n$$
e dunque
$$\text{pr}_W(v) = \frac{\phi(v, w_1)}{\phi(w_1, w_1)}w_1 + \ldots + \frac{\phi(v, w_k)}{\phi(w_k, w_k)}w_k$$

Definizione 10.21 (ortonormale)**.** Una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ si dice ortonormale (rispetto a ϕ) se é ortogonale e $\phi(v_i, v_i) = 1, \forall i = 1, \ldots, n$.

Osservazione 131.
Ogni spazio euclideo ammette *almeno* una base ortonormale (basta normalizzare i vettori di una base ortogonale, che esiste sempre per le proprietá degli spazi euclidei).

Osservazione 132.
Se $\mathcal{B}$ é ortonormale , allora $m_{\mathcal{B}}(\phi) = \mathbb{I}$, dunque $\forall v, w \in V$ si ha

$$\phi(v, w) = {}^t\,[v]_{\mathcal{B}}\mathbb{I}[w]_{\mathcal{B}} = \ xy$$

10.6.1 Ricerca di basi ortonormali

Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Presentiamo un algoritmo per trovare una base $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ ortonormale.

- Poniamo $v'_1 = v_1$
- Prendiamo
$$v'_2 = v_2 - \frac{\phi(v_2, v'_1)}{\phi(v'_1, v'_1)} v'_1$$
Questo vettore é ortogonale a v'_1 e inoltre $\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(v'_1, v'_2)$ quindi sono vettori linearmente indipendenti : infatti $v'_1, v'_2 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$.
- Cerco ora un v_3 tale che
  - $\mathrm{Span}(v'_1, v'_2, v'_3) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$
  - $\{v'_1, v'_2, v'_3\}$ é base ortogonale di $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$

  Basta sottrarre a v_3 la sua proiezione ortogonale su $\mathrm{Span}(v'_1, v'_2) = V'_2$. Poiché v'_1, v'_2 sono ortogonali conosciamo l'espressione analitica della proiezione ortogonale su V'_2. Infatti
$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{V'_2} : V &\to V'_2 \\ x &\to \frac{\phi(x, v'_1)}{\phi(v'_1, v'_1)} v'_1 + \frac{\phi(x, v'_2)}{\phi(v'_2, v'_2)} v'_2 \end{aligned} \tag{10.21}$$
  Dunque basta porre
$$v'_3 = v_3 - \frac{\phi(v_3, v'_1)}{\phi(v'_1, v'_1)} v'_1 - \frac{\phi(v_3, v'_2)}{\phi(v'_2, v'_2)} v'_2$$
  Si osserva che $v'_3 \in \mathrm{Span}(v'_1, v'_2, v'_3) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$. Inoltre la matrice che contiene le coordinate di $\{v'_1, v'_2, v'_3\}$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ é triangolare superiore dunque i vettori sono indipendenti , ovvero $\{v'_1, v'_2, v'_3\}$ é una base ortogonale di $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$.
- Itero il procedimento ponendo , $\forall j$
$$v'_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\phi(v_j, v'_i)}{\phi(v'_i, v'_i)} v'_i \tag{10.22}$$
- Alla fine ottengo una base ortogonale $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$
- Basta normalizzare ponendo $w_i = \frac{v'_i}{||v'_i||}$

Il risultato é quindi il seguente

Teorema 10.6.2 (di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt)**.** *Sia (V, ϕ) spazio euclideo. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V. Allora $\exists$ una base ortonormale $\{w_1, \ldots, w_n\}$ di V tale che* $\mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_j) = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_j), \forall j = 1, \ldots, n$.

10.7 Matrici ortogonali

Definizione 10.22. $M \in M(n, \mathbb{R})$ si dice ortogonale se ${}^tMM = M\,{}^tM = \mathbb{I}$. Denotiamo con

$$\mathcal{O}(n) = \{M \in M(n, \mathbb{R}) : M \text{ é ortogonale}\}$$

Osservazione 133.

1. $M \in \mathcal{O}(n) \Rightarrow M \in GL(n)$ e $M^{-1} = {}^t M$, infatti $\det(\mathbb{I}) = 1 = \det({}^tM)\det(M) = \det^2 M \neq 0$
2. $M \in \mathcal{O}(n) \Rightarrow$ le righe e le colonne di M formano una base ortonormale su $\mathbb{R}^n$.
3. $\mathcal{O}(n)$ dotato del prodotto é un gruppo , detto gruppo ortogonale.
4. Se $A \in \mathcal{O}(n)$, $\det(A) = \pm 1$.
$$SO(n) = \{A \in \mathcal{O}(n) : \det A = 1\}$$
é un gruppo , detto gruppo ortogonale speciale.

Osservazione 134.

$$\mathcal{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \tag{10.23}$$

Proposizione 10.7.1. *(V, ϕ) spazio euclideo. Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormale e $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ base di V. Se M é la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ allora $\mathcal{B}'$ é ortonormale $\Leftrightarrow M$ é ortogonale.*

Dimostrazione. M é la matrice associata a $V_{\mathcal{B}'} \xrightarrow{\text{id}} V_{\mathcal{B}}$ per la quale $[w_i]_{\mathcal{B}} = M^i$. Allora , dato che $\mathbb{I}$ é la matrice associata nella base $\mathcal{B}$ si ha

$$\phi(w_i, w_j) = {}^t\,[w_i]_{\mathcal{B}}\mathbb{I}[w_j]_{\mathcal{B}} = {}^t\,(M^i)M^j = ({}^tM)_i M^j = [{}^tMM]_{ij}$$

Quindi se $\mathcal{B}'$ é ortonormale

$$\phi(w_i, w_j) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

che é la definizione della matrice identitá quindi ${}^tMM = \mathbb{I}$ che coincide con la definizione di ortogonalitá. □

Definizione 10.23 (endormorfismi simmetrici)**.** (V, ϕ) spazio euclideo. $f \in \text{End}(V)$ si dice simmetrico (o autoaggiunto) se $\phi(f(x), y) = \phi(x, f(y)) \forall x, y \in V$.

Proposizione 10.7.2. *Sia $\mathcal{B}$ base ortonormale di V e sia $A = m_{\mathcal{B}}(f)$. Allora f é simmetrica $\Leftrightarrow A$ é simmetrica.*

Dimostrazione. Si ha

$$\phi(f(x), y) = {}^t\,[f(x)]_{\mathcal{B}}\mathbb{I}[y]_{\mathcal{B}} = {}^t\,(A[x]_{\mathcal{B}})[y]_{\mathcal{B}} = {}^t\,[x]_{\mathcal{B}}^{\,t}A[y]_{\mathcal{B}}$$

D'altra parte

$$\phi(x, f(y)) = {}^t\,[x]_{\mathcal{B}}\mathbb{I}[f(y)]_{\mathcal{B}} = {}^t\,[x]_{\mathcal{B}}A[y]_{\mathcal{B}}$$

Bisogna verificare quindi che ${}^t[x]_{\mathcal{B}}A[y]_{\mathcal{B}} = {}^t\,[x]_{\mathcal{B}}^{\,t}A[y]_{\mathcal{B}}, \forall x, y$. Dato che l'uguaglianza deve valere $\forall x, y$ si puó concludere che deve valere ${}^tA = A$, che conclude la dimostrazione. □

10.7.1 Teorema spettrale

Risulta quindi naturale chiedersi quando esiste una base di V ortonormale per ϕ e di autovettori di f (base spettrale). Infatti in questo caso la matrice associata sarebbe diagonale e l'endomorfismo f sarebbe simmetrico.Presentiamo prima un lemma che ci permetterá di capire l'appartenenza degli autovalori al campo reale o complesso , oltre a dimostrare il teorema spettrale.

Lemma 10.7.3. *$A \in M(n, \mathbb{R})$ simmetrica. Allora tutti gli autovalori di A sono reali.*

Dimostrazione. Sia $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ con $x \xrightarrow{A} Ax$. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di A : allora esiste $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$ tale che $Ax = \lambda x \Rightarrow \overline{Ax} = \overline{\lambda x} \Rightarrow A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}$ Calcoliamo

$$\begin{cases} {}^t\bar{x}Ax = {}^t\ \bar{x}(Ax) = {}^t\ \bar{x}\lambda x \\ ({}^t\bar{x}A)x = {}^t\ (A\bar{x})x = \bar{\lambda}\ {}^t\bar{x}x \end{cases} \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda})\ {}^t\bar{x}x = 0 \tag{10.24}$$

Ma ${}^t\bar{x}x = \bar{x}_1x_1 + \ldots + \bar{x}_nx_n = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \in \mathbb{R}$ Dunque $|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ che no é possibile per l'ipotesi. Quindi l'unica possibilitá é che sia $\lambda - \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. □

Teorema 10.7.4 (spettrale)**.** *Sia (V, ϕ) spazio euclideo di dimensione finita , $\dim V = n$. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ simmetrico. Allora $\exists$ base di V ortonormale e di autovettori per f*

Dimostrazione. Per induzione su $\dim V = n$. Per $n = 1$ é ovvio , infatti basta prendere qualsiasi base ortonormale che é una base di autovettori per f. Supponiamo ora $n \geq 2$: dobbiamo provare che $(n-1) \Rightarrow (n)$. Sia $\mathcal{S}$ una base ortonormale di $V \Rightarrow A = m_{\mathcal{S}}(f)$ é simmetrica. Per il lemma esiste λ autovalore reale di A (e quindi di f). Sia $v_1 \neq 0$ con $v_1 \in V(\lambda, f)$, cioé $f(v_1) = \lambda v_1$; supponiamo $||v_1|| = 1$. Sia $V_1 = \mathrm{Span}(v_1)$ che é ovviamente un sottospazio $f-$invariante. $\phi\big|_{V_1}$ é definito positivo e quindi non degenere , quindi é possibile fare lo spezzamento

$$V = V_1 \bigoplus V_1^{\perp}$$

Sappiamo che $f\big|_{V_1}$ é un endomorfismo visto che V_1 é f-invariante , quindi $f\big|_{V_1} : V_1 \to V_1$. Se riuscissimo a provare che anche $f\big|_{V_1^{\perp}}$ é un endomorfismo , ovvero che $V_1^{\perp}$ é f-invariante e quindi $f\big|_{V_1^{\perp}} : V_1^{\perp} \to V_1^{\perp}$, potremmo costruire in modo naturale una base di autovettori per f unendo le due basi di V_1 e $V_1^{\perp}$ e ortonormalizzando. Voglio quindi provare che $f(V_1^{\perp}) \subset V_1^{\perp}$, ovvero che $\forall x \in V_1^{\perp}, f(x) \in V_1^{\perp}$. Per verificare questo dobbiamo mostrare che $\phi(f(x), v_1) = 0$. Calcoliamo quindi

$$\phi(f(x), v_1) = \phi(x, f(v_1)) = \phi(x, \lambda v_1) = \lambda\phi(x, v_1) = 0$$

Dove abbiamo usato rispettivamente la condizione di simmetria su f e il fatto che $x \in V_1^{\perp}$ nell'ultima uguaglianza. Dunque $f\big|_{V_1^{\perp}} : V_1^{\perp} \to V_1^{\perp}$ é un endomorfismo , quindi posso applicare l'ipotesi induttiva a $V_1^{\perp}, \phi\big|_{V_1^{\perp}}, f\big|_{V_1^{\perp}}$: infatti $\dim V_1^{\perp} = n - 1$, $\phi\big|_{V_1^{\perp}}$ é definito positivo perché lo era su V e $f\big|_{V_1^{\perp}}$ é un endomorfismo per quanto visto prima. Dunque esiste sicuramente una base $\{v_2, \ldots, v_n\}$ di $V_1^{\perp}$ ortonormale per ϕ e di autovettori per $f\big|_{V_1^{\perp}}$, e quindi anche per f. La base di V é data quindi da $\{v_1, \ldots, v_n\}$: si deve verificare se questa é una base ortonormale. I vettori sono linearmente indipendenti visto che appartengono a sottospazi in somma diretta , inoltre sono ortogonali perché provengono da sottospazi ortogonali. Inoltre sono autovettori per f visto che , per ipotesi , $f(v_1) = \lambda v_1$ mentre $\{v_2, \ldots, v_n\}$ sono una base di $V_1^{\perp}$. □

Osservazione 135.
Se f simmetrica e H é un sottospazio di V f-invariante allora $H^\perp$ é f-invariante.

Dimostrazione. Provo che $f(H^\perp) \subset H^\perp$, ovvero $\forall x \in H^\perp, f(x) \subset H^\perp$. Devo quindi mostrare che $f(x)$ é ortogonale a tutti i vettori di H , ovvero che $\forall x \in H^\perp, \forall y \in H \Rightarrow \phi(f(x), y) = 0$. Ma

$$\phi(f(x), y) = \phi(x, f(y)) = 0 \qquad \text{visto che } x \in H^\perp, f(y) \in H$$

□

Osservazione 136.
Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ simmetrica , $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Per il teorema spettrale esiste una base $\mathcal{S}$ ortonormale di autovettori per A. Definiamo $m_{\mathcal{C}}(A) = A, m_{\mathcal{S}}(A) = D$ diagonale. Sia M la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{C}$ ad $\mathcal{S}$, dunque $M^{-1}AM = D$. Ma $M \in \mathcal{O}(n)$ quindi $M^{-1} = {}^t M$ e dunque $M^{-1}AM = {}^t MAM = D$ diagonale.

Teorema 10.7.5. *$\forall A \in M(n, \mathbb{R})$ simmetrica esiste $M \in \mathcal{O}(n)$ tale che $M^{-1}AM = {}^t MAM = D$ diagonale$= m_{\mathcal{S}}(b)$*

Corollario 10.7.6. *Si ha che*

- *$i_+(A)$ =numero autovalori positivi di A*
- *$i_-(A)$ =numero autovalori negativi di A*
- *$i_0(A)$ =numero autovalori nulli di A*

Proposizione 10.7.7. *$A \in M(n, \mathbb{R})$ simmetrica. Siano λ, μ due autovalori di A distinti. Allora $V(\lambda), V(\mu)$ sono sottospazi ortogonali.*

Dimostrazione. Quindi $\forall x \in V(\lambda), \forall y \in V(\mu)$ deve essere $\phi(x, y) = 0$. Calcoliamo (moltiplicando per λ)

$$\lambda\phi(x, y) = \phi(\lambda x, y) = \phi(Ax, y) = \phi(x, Ay) = \phi(x, \mu y) = \mu\phi(x, y) \Rightarrow (\lambda - \mu)\phi(x, y) = 0$$

Ma , dato che λ e μ sono distinti $\lambda \neq \mu \Rightarrow \phi(x, y) = 0$ □

10.8 Applicazioni ortogonali

Sia ora (V, ϕ) spazio euclideo.

Definizione 10.24 (applicazione ortogonale)**.** $f \in \mathrm{End}(V)$ si dice applicazione ortogonale (o isometria) se $\phi(f(x), f(y)) = \phi(x, y), \forall x, y \in V$

Osservazione 137.
f ortogonale $\Rightarrow$ f isomorfismo. Infatti basta provare che f é iniettiva. Se per assurdo esistesse $x \in \ker(f)$ con $x \neq 0$ allora $0 = \phi(f(x), f(x)) = \phi(x, x)$ per la definizione di applicazione ortogonale, il che assurdo quindi deve essere necessariamente $\ker(f) = \{0\}$ che é la definizione di applicazione iniettiva, ovvero di isomorfismo.

Osservazione 138.
Sia $\mathcal{B}$ base ortonormale e sia $A = m_{\mathcal{B}}(f)$. Allora f é una applicazione ortogonale $\Leftrightarrow A \in \mathcal{O}(n)$

Dimostrazione. Vale che

$$\phi(f(x), f(y)) = {}^t\,[f(x)]_{\mathcal{B}}\mathbb{I}[f(y)]_{\mathcal{B}} = {}^t\,[x]_{\mathcal{B}}^{t}AA[y]_{\mathcal{B}}$$

D'altra parte

$$\phi(x, y) = {}^t\,[x]_{\mathcal{B}}[y]_{\mathcal{B}}$$

Quindi f é ortogonale $\Leftrightarrow {}^t\,[x]_{\mathcal{B}}[y]_{\mathcal{B}} = {}^t\,[x]_{\mathcal{B}}^{t}AA[y]_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow {}^t\,AA = \mathbb{I}$, ovvero $\Leftrightarrow A \in \mathcal{O}(n)$. □

Osservazione 139.
Se $A \in \mathcal{O}(n), A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é una isometria.

Osservazione 140.

$$\mathcal{O}(V) = \{f \in \mathrm{End}(V) : f \text{ ortogonale}\}$$

Allora $f \in \mathcal{O}(V) \Rightarrow \phi(f(x), f(x)) = \phi(x, x) \Rightarrow ||f(x)||^2 = ||x||^2$ quindi $\forall x \in V, ||f(x)|| = ||x||$, ovvero le applicazioni ortogonali conservano la norma.

Proposizione 10.8.1. *Sono fatti equivalenti*

1. *f ortogonale*
2. $||f(x)|| = ||x||, \forall x \in V$
3. *Se $\mathcal{B}$ é una base ortonormale allora $f(\mathcal{B})$ é una base ortonormale.*

Dimostrazione. .
(1) ⇒ (2) : visto sopra.
(1) ⇒ (3) : Prendo $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormale. $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ é una base perché f é un isomorfismo. Questi vettori sono anche ortogonali perché $\phi(f(v_i), f(v_j)) = \phi(v_i, v_j) = 0$ per ipotesi. Inoltre questi vettori si possono normalizzare quindi sono la base cercata.
(2) ⇒ (1) : Sappiamo che la proprietá é vera per $x = y$. Per provarla anche nel caso $x \neq y$ si puó usare la formula di polarizzazione prendendo

$$\phi(x, y) = \frac{\phi(x + y, x + y) - \phi(x, x) - \phi(y, y)}{2}$$

Per ipotesi questa é uguale a

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \frac{\phi(f(x + y), f(x + y)) - \phi(f(x), f(x)) - \phi(f(y), f(y))}{2} \\ &= \frac{\phi(f(x) + f(y), f(x) + f(y)) - \phi(f(x), f(x)) - \phi(f(y), f(y))}{2} \\ &= \frac{\phi(f(x), f(x)) + \phi(f(y), f(y)) + 2\phi(f(x), f(y)) - \phi(f(x), f(x)) - \phi(f(y), f(y))}{2} \\ &= \phi(f(x), f(y))\end{aligned} \tag{10.25}$$

(3) ⇒ (1) : Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormale. Voglio provare che $\forall x, y : \phi(x, y) = \phi(f(x), f(y))$. Scriviamo

$$x = \sum_i \alpha_i v_i \quad y = \sum_i \beta_i v_i$$

Dunque

$$\phi(x,y) = \phi\left(\sum_i \alpha_i v_i, \sum_j \beta_j v_j\right) = \sum_i \alpha_i \beta_i$$

infatti $\phi(v_i, v_j) = 0 \Leftrightarrow i \neq j$ e $\phi(v_i, v_j) = 1$ per $i = j$. D'altra parte

$$\begin{aligned}\phi(f(x), f(y)) &= \phi\left(f\left(\sum_i \alpha_i v_i\right), f\left(\sum_j \beta_j v_j\right)\right) = \phi\left(\sum_i \alpha_i f(v_i), \sum_j \beta_j f(v_j)\right) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \phi(f(v_i), f(v_j)) = \sum_i \alpha_i \beta_i\end{aligned} \tag{10.26}$$

infatti anche $f(\mathcal{B})$ é una base ortonormale per ipotesi. □

Osservazione 141.
Sia $f \in \mathcal{O}(V)$ e H un sottospazio vettoriale di V , f-invariante. Allora $H^\perp$ é f-invariante.

Dimostrazione. Provo che $f(H^\perp) \subset H^\perp$, ovvero $\forall x \in H^\perp, f(x) \in H^\perp$, cioé $\forall x \in H^\perp, \forall y \in H$ devo mostrare che $\phi(f(x), y) = 0$. Ma $y \in \mathrm{Imm}(f)$ perché f é un isomorfismo. Quindi $\exists z \in V$ tale che $y = f(z)$. Dato che $f(H) \subset H$ ed f é isomorfismo allora deve essere necessariamente $f(H) = H$. Quindi $f(z) \in H \Rightarrow z \in H$. Dunque $\phi(f(x), y) = \phi(f(x), f(z))$ con $z \in H$. Dunque per l'ipotesi di ortogonalitá su $f$si ha che

$$\phi(f(x), f(z)) = \phi(x, z) = 0$$

visto che $x \in H^\perp, z \in H$. □