Formulario di Metodi Matematici

I. *TRASFORMATE DI FOURIER*

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
$\dfrac{1}{a+it}$	$2\pi\vartheta(\omega)e^\wedge - a\omega$
e^{-at^2} , $a>0$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{A}}\, e^{-\omega^2/4a}$
$\vartheta(t)e^{-at}$	$\dfrac{1}{a-i\omega}$
$\vartheta(-t)e^{at}$	$\dfrac{1}{a+i\omega}$
$t^k\,\vartheta(t)e^{-at}$	$(-i)^k\dfrac{d^k}{d\omega^k}\left(\dfrac{1}{a-i\omega}\right)$
$\dfrac{1}{a^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{a}\, e^{-a\lvert\omega\rvert}$
$\dfrac{\sin t}{t}$	$\begin{cases}\pi & per\ \lvert\omega\rvert<1\\ 0 & per\ \lvert\omega\rvert>1\end{cases}$
$\vartheta(t)\, e^{-i\overline{\omega}t}$	$\dfrac{2\sin(\omega-\overline{\omega})}{\omega-\overline{\omega}}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1
$\dfrac{1}{2\pi}e^{-(i\omega_0 t)}$	$\delta(\omega-\omega_0)$
$-\vartheta(t)e^{-t}+\delta(t)$	$-\dfrac{i\omega}{1-i\omega}$
$\dfrac{t}{1+t^2}$	$-i\pi e^{-\lvert\omega\rvert}$
$\dfrac{t^2}{1+t^2}$	$-\pi e^{-\lvert\omega\rvert}+2\pi\delta(\omega)$

Con ovvia definizione delle funzioni

$$\vartheta(t)\equiv\begin{cases}0 & per\ \ t<0\\ 1 & per\ \ t>0\end{cases}\ ;\ \frac{d\vartheta}{dt}\equiv\delta(t)$$

- ***Proprietà della trasformata in L^1***

$$\hat{f}(\omega)=\mathcal{F}\big(f(t)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega t}dt$$

i. $f\in L^1\Longrightarrow\hat{f}$ *limitata*
ii. $f\in L^1\Longrightarrow\lim_{\omega\to\pm\infty}\hat{f}(\omega)=0$
iii. $\mathcal{F}\big(f(t-a)\big)=e^{i\omega a}\,\hat{f}(\omega)\ \ ;\ \ \mathcal{F}\big(f(t+a)\big)=e^{-i\omega a}\,\hat{f}(\omega)$
iv. $\mathcal{F}\left(e^{-ibt}f(t)\right)=\hat{f}(\omega-b)$
v. $f\in L^1\Longrightarrow\hat{f}(\omega)\in C^0$

vi. $t^k f(t) \in L^1 \Longrightarrow \hat{f}(\omega) \in C^k, \frac{d^k \hat{f}}{d\omega^k} = \mathcal{F}\left((it)^k f(t)\right)$

vii. $f \in L^1, f' \in C^1 \Longrightarrow \mathcal{F}(f') = -i\omega \hat{f}(\omega)$

viii. $f' \in L^1, f^{(k)} \in L^1 \Longrightarrow \mathcal{F}\left(f^{(k)}\right) = (-i\omega)^k \hat{f}(\omega)$

ix. $f_1, f_2 \in L^1$. *Si definisce il prodotto di convoluzione delle due funzioni come*

$$(f_1 * f_2)(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y) f_2(y) dy$$

Allora $\mathcal{F}(f_1 * f_2) = \widehat{f_1} \cdot \widehat{f_2}$

❖ ***Trasformata in*** $\boldsymbol{L^2}$

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\big(f(t)\big) = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} f(t) e^{i\omega t} dt$$

i. $f \in L^2 \Longrightarrow \hat{f} \in L^2$ *e* $\|\hat{f}(\omega)\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \|f(t)\|_{L^2}$

ii. *I n* L^2, $\mathcal{F}$ *è iniettiva e surgettiva, dunque è invertibile*

iii. *Si conservano i prodotti scalari :* $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \sqrt{2\pi} \langle f, g \rangle$

iv. *Valgono le stesse proprietà della trasformata*

❖ ***Antitrasformata in*** $\boldsymbol{L^2}$

$$\mathcal{F}^{-1}\big(g(\omega)\big) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-it\omega} d\omega$$

i. $f \in L^1 \Longrightarrow g \in C^0$; $g \in L^1 \Longrightarrow f \in C^0$; $f \notin C^0 \Longrightarrow g \notin L^1$

ii. *La definizione di* $\mathcal{F}^{-1}$ *fa di* $\mathcal{F}$ *un ISOMORFISMO.*

iii. *Siano* $f_n(t)$ *un SONC in* $L^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \hat{f}_n(\omega)$ *sono un SONC in* $L^2(\mathbb{R})$.

iv. $f_n(t) \to f(t)$ *in* $L^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \hat{f}_n(\omega) \to \hat{f}(\omega)$

v. *La soluzione di un'equazione differenziale* $L[y] = f$ *può essere scritta come*

$$y(t) = y_{\mathcal{F}} + y_0$$

dove $y_{\mathcal{F}}$ *è la soluzione trovata tramite risoluzione tramite trasformata di Fourier e* y_0 *è la soluzione dell'equazione omogenea associata.*

vi. *Se* $T = x^2 - d^2/dx^2$ *allora* $T'(\hat{f}) = \mathcal{F}\big(T(f)\big) \Longrightarrow T'\mathcal{F} = \mathcal{F}T$

vii. $\mathcal{F}^2(f)$ *è l'operatore di parità mentre* $\mathcal{F}^4 = I$.

viii. *Per gli operatori lineari vale il seguente diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc} f_1 & \xrightarrow{T} & f_2 \\ \mathcal{F}\downarrow & & \downarrow\mathcal{F} \\ \widehat{f_1} & \xrightarrow[T']{} & \widehat{f_2} \end{array}$$

❖ ***Funzione di Green***

Rappresenta il coefficiente funzionale di proporzionalità tra intensità di corrente e tensione in ingresso.

$$\hat{I}(\omega) = \hat{G}(\omega) \cdot \hat{V}(\omega) \Longrightarrow I(t) = G(t) * V(t)$$

Situazione	$\boldsymbol{\widehat{G}(\omega)}$	$\boldsymbol{G(t)}$

Circuito RL	$\frac{1}{R - i\omega L}$	$\frac{1}{L}\,\vartheta(t)e^{-t/\tau}\ ,\tau \equiv \frac{L}{R}$
Circuito RL con segnale ritardato	$\frac{e^{i\omega t_0}}{R - i\omega L}$	$\frac{1}{L}\,\vartheta(t-t_0)e^{-(t-t_0)/\tau}\ ,\tau \equiv \frac{L}{R}$
Eq. Differenziale del tipo $y' + y = f(t)$	$-\frac{1}{1+i\omega}$	$-\vartheta(t)e^{t}$
Circuito RL (tensione ai capi dell'induttanza)	$-\frac{i\omega L}{R - i\omega L}$	$R = L = 1 \Longrightarrow -\vartheta(t)e^{-t} + \delta(t)$

- ***Delta di Dirac***

  i. $\int \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$
  ii. $\mathcal{F}\big(\delta(t)\big) = 1\ ;\ \mathcal{F}\big(\delta(t-t_0)\big) = e^{i\omega t_0}$
  iii. $\mathcal{F}^{-1}(\delta) = 1/2\pi$
  iv. $\int \delta(t-t_0)\varphi(t)dt = \varphi(t_0\,)$
  v. $x\,\delta(x) = 0\ ;\ x\delta(x-a) = a\,\delta(x-a)$
  vi. *La derivata di funzioni con discontinuità discrete si può definire tramite la* δ

$$\frac{d}{dt}\big(u(t)\big) = \dot{u} + \sigma\,\delta(t-t_0)$$

dove

$$\sigma \equiv \lim_{t\to t_0^+} u(t) - \lim_{t\to t_0^-} u(t)$$