Formulario Meccanica Relativistica

- **Aberrazione stellare**

$$\tan(\vartheta' - \vartheta) = \frac{\frac{v}{c}\sin\vartheta}{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta} \approx \frac{v}{c}\sin\vartheta$$

- **Effetto Doppler**

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{\hat{n}(\vec{v}_o - \vec{v}_s)}{c}\right)$$

- **Fase di un'onda**

$$\Phi = \nu\left(t - \frac{\hat{n}\vec{r}}{c}\right) \rightarrow invariante\ per\ cambiamento\ di\ sistema$$

- **Trasformazioni di Lorentz**

$$\begin{cases} x' = \gamma(v)(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} ,\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- **Relazioni tra fattori di Lorentz**

$$\gamma(u') = \gamma(u)\,\gamma(v)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)$$

- **Contrazione delle lunghezze , dilatazione dei tempi**

$$l = \frac{l_0}{\gamma(v)} \ ; \ \Delta t = \gamma(v)\Delta t'$$

- **Composizione delle velocità**

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \dfrac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \\ u'_z = \dfrac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \end{cases} \Longrightarrow (u')^2 = \frac{(u_x - v)^2 + \left(u_y^2 + u_z^2\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2}$$

- **Propagazione dei vettori d'onda**

Indicando con ω la velocità di propagazione dell'onda , v la velocità relativa tra i due sistemi , α , α' gli angoli tra la direzione del moto del sistema primato ed i versori $\hat{n}, \hat{n}'$ si ricava la legge di trasformazione delle grandezze caratteristiche dell'onda.

$$\begin{cases} \nu' = \nu\gamma\left(1 - \dfrac{\hat{n}\vec{v}}{\omega}\right) \\ \alpha' = \operatorname{atan}\left(\dfrac{\sin\alpha}{\gamma\left(\cos\alpha - \frac{v\omega}{c^2}\right)}\right) \\ \omega' = \dfrac{\omega - \hat{n}\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{2\omega v}{c^2}\, cos\alpha - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\alpha + \frac{\omega^2 v^2}{c^4}}} \end{cases}$$

- **Effetto Doppler Longitudinale**

$$\nu_L' = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}\ \nu_L$$

- **Trasformazioni in forma matriciale**

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & -\dfrac{v^2}{c} \\ -\dfrac{v^2}{c} & \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

- **Rapidità**

$$\frac{v}{c} \equiv \beta = \tanh\vartheta \implies \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = e^{-\vartheta} \implies \gamma = \cosh\vartheta\ ;\ \frac{d}{dt}(\beta\gamma) = \cosh\vartheta\,\frac{d\theta}{dt}$$

- **Legge di Minkowski**

$$\vec{p} = m_0\gamma(v)\vec{v} = m\vec{v} \implies \frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}) = \vec{F} \implies m_0\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\gamma}\left[\vec{F} - \left(\vec{F}\cdot\vec{v}\right)\frac{\vec{v}}{c^2}\right]$$

- **Massa a riposo ed energia**

$$m_0 = \frac{m}{\gamma} \implies E = E_0 + m_0\gamma c^2 = \underbrace{m_0 c^2}_{\substack{energia \\ riposo}} + \underbrace{m_0\gamma c^2}_{\substack{energia \\ cinetica}}$$

- **Conservazione dell'energia**

  La massa non si conserva!

$$\sum_i T_i + \sum_i m_{0_i} c^2 = \sum_f T_f + \sum_f m_{0_f} c^2$$

- **Energia nel centro di massa**

$$M_0 c^2 = \sum_a \left(\underbrace{m_{0_a} c^2}_{riposo} + \overbrace{\underbrace{T_a}_{\substack{cinetica\\moti\\relativi}} + \underbrace{\sum_{b>a} V_{ab}}_{\substack{potenziale\\interazioni}}}^{energia\ di\ legame} \right) \Rightarrow \sum_a m_{0_a} \neq M_0$$

- **Momento ed energia**

$$E = \sqrt{p^2c^2 + {m_0}^2 c^4} \Rightarrow \begin{cases} m_0 = 0 \Rightarrow E = pc \\ v \ll c \Rightarrow E = p^2/2m_0 \end{cases}$$

- **Trasformazioni di momento ed energia**

$$\begin{cases} p'_x = \gamma \left(p_x - \dfrac{v}{c^2} E \right) \\ p'_y = p_y \ ; \ p'_z = p_z \\ E' = \gamma (E - v p_x) \end{cases}$$

Da ora in poi verrà utilizzata come notazione $m \to m_0$, ovvero la massa a riposo sarà indicata , per evitare fraintendimenti , con m .

- **Quadrivettore**

  - Covariante → $X^\mu \equiv (X^0, X^1, X^2, X^3) = (ct, x, y, z)$
  - Controvariante → $X_\mu \equiv (X^0, -X^1, -X^2, -X^3) = (ct, -x, -y, -z)$

  La differenza consiste nel comportamento rispetto ad una trasformazione . Tra le due forme si passa attraverso il tensore metrico contro variante

$$X^\nu = g^{\mu\nu} X_\mu \ \leftrightarrow X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu$$

  - I tensori sono legati tra loro dalla delta di Kroenecker tridimensionale

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$$

- **Norma di un quadrivettore**
  Invariante per trasformazioni.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = dX_\mu dX^\mu \Rightarrow ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu} \Rightarrow ds = \frac{cdt}{\gamma(v)}$$

- **Quadrivelocità**

$$U^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{ds} = \left(\gamma(v), \frac{\gamma(v)}{c}\vec{v}\right) = \gamma(v)\left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right)$$

$$U^\mu U_\mu = 1$$

- **Quadriaccelerazione**

$$A^\mu \equiv \frac{dU^\mu}{ds} = \frac{d^2X^\mu}{ds^2} = \left(\frac{\gamma^4}{c^3}\ \vec{v}\cdot\vec{a}\ , \frac{\gamma^2}{c^2}\left(a^i + \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{a})v^i\right)\right)$$

$$A^\mu U_\mu = 0$$

- **Quadrimomento**

$$p^\mu = mcU^\mu = \left(m\gamma(v)c, m\gamma(v)v^i\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$$

- **Centro di massa**

$$\vec{x}_{CM} = \frac{\sum_a m_a \gamma(v_a)\vec{x}_a}{\sum_a m_a\gamma(v_a)} = \frac{\sum_a E_a\vec{x}_a}{\sum_a E_a}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_a m_a \gamma(v_a)\vec{v}_a}{\sum_a m_a\gamma(v_a)} = \frac{c^2\vec{p}_{tot}}{E_{tot}}$$

Per le collisioni useremo come notazione di massa a riposo quella usuale $m_0 \to m$ e porremmo per semplicità $c = 1$. Per ripristinare le unità di misura basterà moltiplicare per l'opportuna potenza di c .

- **Urti**

  - *Elastici* $(1 + 2 \to 1' + 2')$: Le particelle uscenti sono dello stesso tipo di quelle entranti. Si conserva l'energia cinetica.
  - *Anelastici* $(1 + 2 \to 3\ o\ 3 + 4\ o\ 1' + 3\ ...)$ *:* Le particelle uscenti sono di stati cinematici e fisici diversi da quelle entranti. Ne è un esempio $p^+ + p^- \to \pi^+ + \pi^-$.

- **Conservazione del quadri momento**

$$\sum_i p_i = \sum_f p_f \Longrightarrow \sum_i E_i = \sum_f E_f$$

- **Sistemi**

  - *Laboratorio :* Una delle due particelle interagenti (bersaglio) è a riposo con $\vec{p}_2 = 0 \Longrightarrow E_2 = m_2$. La particella incidente ha quindi quadri momento pari a $p_1 = (E_1, 0,0, |\vec{p}_1|)$.
    Il quadri momento totale è dato da $P = \sum_i p_i$.
  - *Centro di Massa:* Il momento totale delle particelle è nullo , si ha quindi

$$\sum_i \vec{p}_i^* = 0 \Longrightarrow |\vec{p}_i| = |\vec{p}_j| \text{ , } \forall\ i \neq j$$

Il quadri momento totale è dato da $P^* = \sum_i p_i^*$
Per 2 particelle incidenti sull'asse z valgono quindi le seguenti

$$\begin{cases} p_1^* = (E_1^*, 0,0, p^*) \\ p_2^* = (E_2^*, 0,0, -p^*) \end{cases} \Longrightarrow p^* = |\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_2^*|$$

$$E_1^* = \sqrt{p^{*2} + m_1^2} \text{ , } E_2 = \sqrt{p^{*2} + m_2^2}$$

- **Massa invariante**
Avendo definito un prodotto scalare per i quadri momenti si può scrivere $p_i \cdot p_j \geq m_i m_j$ da cui si deduce la fondamentale relazione

$$W^2 = \left(\sum_i p_i\right)^2 \geq \left(\sum_i m_i\right)^2$$

La massa invariante si conserva in un urto , per la conservazione dei quadri momenti infatti si ha

$$W_i^2 = \left(\sum_i p_i\right)^2 = \left(\sum_f p_f\right)^2 = W_f^2$$

Il suo valore dipende dal sistema adottato

  - *Laboratorio :* $W = \sqrt{(\sum_i E_i)^2 - (\sum_i \vec{p}_i)^2} < \sum_i E_i$
  - *Centro di Massa :* $W = \sqrt{\left(\sum_i E_i^*\right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i^{\,*}\right)^2} = \sum_i E_i^*$

- **Variabili di Mandelstam**
Utili nei processi di collisione a due corpi del tipo $1 + 2 \to 3 + 4$. Set di variabili non necessariamente indipendenti.

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = W^2 \\ t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\ u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \end{cases} \Longrightarrow s + t + u = \sum_{i=1}^{4} m_i^2 \Longrightarrow \begin{cases} s \geq 4m^2 \\ t \leq 0 \\ u \leq 0 \end{cases}$$

- **Urti Elastici**
Si trattano gli urti del tipo $1 + 2 \to 1' + 2'$ nel piano xz .

  - *Centro di Massa :* Si usa la conservazione dell'energia e del quadrimomento per trovare la trasformazione tra quadri momenti iniziali e finali

$$p_1^* \text{ , } p_2^* \to \begin{cases} p_1^{*\prime} = (E^*, p^* \sin\vartheta^* \text{ , } 0, p^* \cos\vartheta^*) \\ \\ p_2^{*\prime} = (E^*, -p^* \sin\vartheta^* \text{ , } 0, -p^* \cos\vartheta^*) \end{cases}$$

$$E_1^{*\prime} = E_2^{*\prime} = E^{*\prime}$$

- *Laboratorio :* Si usa la conservazione dell'energia e del quadri momento come al solito trovando relazioni più complesse

$$p_1, p_2 \rightarrow \begin{cases} p_1' = (E_1', |\vec{p}_1'| \sin\vartheta, 0, |\vec{p}_1'| \cos\vartheta) \\ \\ p_2' = (E_2', |\vec{p}_2'| \sin\varphi, 0, |\vec{p}_2'| \cos\varphi) \end{cases}$$

Tra i due sistemi intercorrono le seguenti relazioni

$$\tan\vartheta = \frac{\sin\vartheta^*}{\gamma_{CM}(\cos\vartheta^* + 1)} \quad , \tan\varphi = \frac{\sin\vartheta^*}{\gamma_{CM}(1 - \cos\vartheta^*)} \implies \tan\vartheta \tan\varphi < 1 \implies \vartheta + \varphi < \frac{\pi}{2}$$

❖ **Diffusione Compton**

Il processo studiato è l'investimento di un elettrone da parte di un fotone $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$. Si indicano con ϑ, φ gli angoli di diffusione rispettivamente del fotone e dell'elettrone. La frequenza di emissione è legata a quella incidente da

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}(1 - \cos\vartheta)}$$