Principio di Invertibilit della Vorticit Potenziale

Guido Cioni

19 febbraio 2013

In ambito meteorologico si usa spesso parlare di equazioni diagnostiche ed equazioni prognostiche. Nella prima categoria di equazioni ricadono tutte quelle relazioni che permettono di stabilire se le approssimazioni che stiamo facendo (indispensabili per semplificare le equazioni del moto) su un certo modello sono troppo grossolane: è il caso dell'equazione per il vento geostrofico e la parente equazione del vento termico. Il secondo tipo di equazioni ci permette, sulla base delle approssimazioni fatte, di ricavare una legge temporale che ci permetta di fare una previsione (*forecast*). É un esempio l'equazione utilizzata da Richardson per produrre la prima previsione meteorologica (fortemente inesatta) della storia: l'equazione della tendenza barotropica

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\vec{V}_s \cdot \nabla p_s - \int_0^{p_s} \nabla_p \cdot \vec{V}_H \tag{1}$$

Il principio di invertibilità della vorticità potenziale ricade nella seconda categoria di equazioni perché ci permette di calcolare l'evoluzione di un campo di variabili (temperatura, pressione..) a partire da una legge temporale. Per ricavare l'equazione che ci permette di fare questo dobbiamo innanzitutto partire dalla definizione di vorticità data da $\zeta = \nabla \times \vec{V}$. Vediamo come possiamo ottenere questa grandezza a partire dalle equazioni primitive.

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - g\hat{k} \tag{2}$$

Esprimiamo la derivata totale come

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) + (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} \tag{3}$$

dove l'ultima uguaglianza segue per una relazione vettoriale nota. Applicando il rotore all'equazione (3) si ottiene

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{V}) + \nabla \times \left[\frac{1}{2}\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V})\right] + \nabla \times \left[(\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V}\right] = \\ &= -\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p - \frac{1}{\rho}\nabla \times \nabla p - 2\nabla \times (\Omega \times \vec{V}) - \nabla \times (\nabla\phi) \Rightarrow \\ &\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{V}) + \nabla \times \left[(\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V}\right] = -\nabla\alpha \times \nabla p - 2\nabla \times (\Omega \times \vec{V}) \end{aligned} \tag{4}$$

Infatti il rotore di un gradiente è nullo.
Definisco quindi la quantità $\zeta_r = \nabla \times \vec{V}$ come vorticità relativa. La vorticità assoluta sarà la somma $\zeta_a = \zeta_r + 2\Omega$ della vorticità relativa e di quella planetaria. Possiamo quindi scrivere[1]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\vec{\zeta}_a + \nabla \times (\vec{\zeta}_a \times \vec{V}) = -\nabla\alpha \times \nabla p \Rightarrow \\ &\frac{\partial}{\partial t}\vec{\zeta} + \vec{\zeta}(\nabla\dot{V}) - \vec{V}(\nabla\vec{\zeta}) + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{\zeta} - (\zeta \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = -\nabla\alpha \times \nabla p \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\zeta + \vec{\zeta}(\nabla \cdot \vec{V}) - (\vec{\zeta} \cdot \nabla)\vec{V} = -\nabla\alpha \times \nabla p \end{aligned} \tag{5}$$

Utilizzamo ora l'equazione di continuità moltiplicata scalarmente per $-\vec{\zeta}/\rho$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \nabla \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow -\frac{\vec{\zeta}}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} - \frac{\vec{\zeta}}{\rho}\nabla \cdot \vec{V} = 0 \tag{6}$$

[1]Omettiamo da ora in poi il pedice $_a$ sottointendendo $\zeta_a = \zeta$.

Sommiamo l'equazione (6) all'ultima della (5) moltiplicata per $1/\rho$. Si ottiene

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\vec{\zeta}}{\mathrm{d}t} - \frac{\vec{\zeta}}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} - \frac{\vec{\zeta}}{\rho}\nabla\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla\alpha \times \nabla p \Rightarrow \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{\zeta}}{\rho}\right) = \vec{\zeta}\cdot\nabla\vec{V} - \nabla\alpha\times\nabla p \tag{7}$$

La (7) fornisce l'andamento della vorticità nel tempo. I termini che contribuiscono alla sua variazione sono un primo termine di stiramento/torsione ed un secondo termine detto baroclino-solenoidale. Definità la vorticità e la sua variazione ci interessa trovare la definizione di vorticità potenziale. Per fare questo iniziamo esprimendo la derivata totale della temperatura potenziale θ in questo modo

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) &= \nabla\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\theta\right) = \frac{\partial(\nabla\theta)}{\partial t} + \nabla(\vec{V}\cdot\nabla\theta) + (\vec{V}\cdot\nabla)\nabla\theta - (\vec{V}\cdot\nabla)\nabla\theta \\ &= \frac{\mathrm{d}(\nabla\theta)}{\mathrm{d}t} + \nabla(\vec{V}\cdot\nabla\theta) - (\vec{V}\cdot\nabla)\nabla\theta\end{aligned} \tag{8}$$

Supponiamo che il modo sia adiabatico e moltiplichiamo la (8) scalarmente per $\vec{\zeta}$. Otteniamo quindi

$$\vec{\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}(\nabla\theta)}{\mathrm{d}t} = \vec{\zeta}[-\nabla(\vec{V}\cdot\nabla\theta) + (\vec{V}\cdot\nabla)\nabla\theta)] = -[(\vec{\zeta}\cdot\nabla)\vec{V}]\nabla\theta \tag{9}$$

dove l'ultima relazione segue per una eguaglianza vettoriale nota. Ora consideriamo la (7) moltiplicata scalarmente per $\nabla\theta$ e sommiamola alla (9). Otteniamo

$$\vec{\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}(\nabla\theta)}{\mathrm{d}t} + \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{\zeta}}{\rho}\right)\nabla\theta = -(\nabla\alpha\times\nabla p)\nabla\theta \tag{10}$$

D'altra parte θ è funzione di T e di p, quindi di p ed α per l'equazione di stato. Dunque $\nabla\theta$ è combinazione lineare di p ed $alpha$, ovvero è ortogonale al vettore $(\nabla\alpha\times\nabla p)$. Il termine a destra dell'uguaglianza è quindi nullo e la relazione si riduce a:

$$\vec{\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}(\nabla\theta)}{\mathrm{d}t} + \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{\zeta}}{\rho}\right)\nabla\theta = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{\zeta}}{\rho}\cdot\nabla\theta\right) = 0 \tag{11}$$

Abbiamo trovato quindi una legge di conservazione per la quantità

$$P = \frac{\vec{\zeta}}{\rho}\cdot\nabla\theta \tag{12}$$

che viene detta vorticità potenziale di Ertel. Per un moto adiabatico e senza attrito la vorticità P viene conservata nel tempo. Questa è l'espressione della vorticità potenziale in coordinate (x, y, z). In meteorologia vengono però spesso usate altre variabili verticali come p, θ, σ. Risulta interessante trovare l'espressione della vorticità potenziale in coordinate θ. Il teorema di *Vilhelm-Bjerkness* afferma che la circuitazione in un sistema rotante è data da

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} + 2\Omega\frac{\mathrm{d}A_E}{\mathrm{d}t} = -\oint \alpha\,\mathrm{d}p \tag{13}$$

Dove $A_E = A\sin\varphi$ è la proiezione dell'area sul piano equatoriale, C è la circuitazione, Ω è la velocità di rotazione e l'integrale è computato su un circuito chiuso. D'altra parte

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p} = \frac{p}{R\rho}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p} \Rightarrow \rho = \frac{p_0^{R/c_p}}{R}\theta^{-1}p^{c_v/c_p} \tag{14}$$

quindi $\oint \alpha\,\mathrm{d}p = \oint \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}p \propto \oint p^{-c_v/c_p}\,\mathrm{d}p = \oint \mathrm{d}p^{1-c_v/c_p} = 0$ dato che p è una funzione di stato termodinamica. Dunque la (13) diventa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[C + 2\Omega A \sin\varphi\right] = 0 \tag{15}$$

La definizione di vorticità data all'inizio di questo documento può essere data anche in forma integrale (la stessa cosa che si fa con le equazioni di *Maxwell*) come

$$\vec{\zeta} = \lim_{A\to 0}\left[\frac{1}{A}\oint \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\right] = \lim_{A\to 0}\frac{C}{A} \tag{16}$$

Con questa definizione possiamo riscrivere la (15) come

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[C + 2\Omega A \sin\varphi\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[A\left(\frac{C}{A} + 2\Omega\sin\varphi\right)\right] = 0 \tag{17}$$

che nel limite $A \to 0$ diventa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\delta A(\zeta + f)\right] = 0 \tag{18}$$

ovvero $\delta A(\zeta + f)$ si mantiene costante. Con questa relazione, notando che per un cilindro di fluido vale $\delta A = \mathrm{COST}/\delta z$, si può derivare una formulazione euristica delle onde di Rossby orografiche (vd. Holton). Ci interessa ora esprimere la δA in funzione delle variabili caratteristiche del fluido. Il volume è

$$\delta V = \delta A \delta z = \delta A \delta p \frac{\partial z}{\partial p} = -\delta A \frac{\delta p}{\rho g}$$

Dunque

$$\delta m = \rho \delta V = -\delta A \frac{\delta p}{g} = -\frac{1}{g}\delta A \frac{\partial p}{\partial \theta}\delta\theta \Rightarrow \delta A = -g\frac{\delta m}{\delta\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p} = -\mathrm{COST} g \frac{\partial\theta}{\partial p}$$

infatti la massa si conserva in un cilindro di fluido e siamo in approssimazione adiabatica per cui $\delta\theta$ =COST. Dunque possiamo riscrivere la (18) come

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-g\frac{\partial\theta}{\partial p}(\zeta + f)\right] = 0 \tag{19}$$

ed abbiamo trovato una legge di conservazione per la quantità PV$= -g\frac{\partial\theta}{\partial p}(\zeta+f)$ che viene detta vorticità potenziale di Ertel-Rossby. Si noti che ha segno negativo in modo che sia positivo dell'emisfero NORD. Questa quantità è una misura del rapporto tra la vorticità assoluta e la profondità effettiva del vortice data da $\partial p/\partial\theta$. Se il flusso è bilanciato tutte le variabili possono essere ottenute a partire dalla distribuzione spaziale della PV e sotto condizioni al contorno accettabili. Una volta ottenute le variabili si può cercare una nuova distribuzione della PV dall'equazione di convezione e ricavare un nuovo set di variabili mediante metodi numerici. Consideriamo il caso di moto adiabatico, idrostatico e senza attrito descritto in coordinate θ. Le equazioni sono

$$\frac{\partial \vec{V}_H}{\partial t} + \vec{V}_H \cdot \nabla \vec{V}_H = -\nabla M - f\vec{k}\times\vec{V}_H \tag{20}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \pi \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + \nabla\cdot\vec{V}_H = 0 \tag{22}$$

dove $M = c_pT + gz = c_pT + \phi$ è la Montgomery streamfunction e $\pi = c_p(p/p_0)^{R/c_p}$ è la funzione di Exner. Se assumiamo che le velocità siano in equilibrio geostrofico, allora

$$\vec{V}_H \simeq \vec{V}_g = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla M \Rightarrow \zeta = \frac{1}{f}\nabla^2 M \tag{23}$$

Dall'equazione idrostatica si ottiene

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = c_p \left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/c_p} \Rightarrow p = p_0 \left(\frac{1}{c_p}\frac{\partial M}{\partial \theta}\right)^{c_p/R} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{p_0}{R}\left(\frac{1}{c_p}\frac{\partial M}{\partial \theta}\right)^{c_p/R-1}\frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2}$$

La vorticità potenziale definita nella (19) si scrive quindi come

$$P_g = -g\frac{\zeta_\theta + f}{\frac{\partial p}{\partial \theta}} = -g\frac{f + \frac{1}{f}\nabla^2 M}{\frac{p_0}{R}\left(\frac{1}{c_p}\frac{\partial M}{\partial \theta}\right)^{c_p/R-1}\frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2}} \tag{24}$$

Se $P_g > 0$ (la possiamo ricavare dalle osservazioni!) questa rappresenta un'equazione ellittica per M, da risolvere con condizioni al contorno (ottenute, ad esempio, dall'equazione termodinamica). Dato che $M = c_pT + gz$ conosciamo T e θ sulla topografia e quindi psosiamo calcolare $\vec{V}$ e tutte le altre quantità. La nuova P_g all'istante successivo può essere ottenuta usando la sua conservazione con avvezione geostrofica sulle superfici isoentropiche:

$$\frac{\partial P_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_\theta P_g = 0 \tag{25}$$