

Una semplice derivazione fisica del Modello di Lorenz

Guido Cioni

27 aprile 2011

1 Approccio fisico

1.1 Sistema fluidodinamico

Il modello di Lorenz rappresenta il moto di un fluido sotto condizioni di *Rayleigh-Bénard* : una porzione di fluido incomprimibile é contenuta in una cella che ha temperatura maggiore , T_w , sul fondo e temperatura minore T_c in cima alla cella. Fisicamente questa situazione rappresenta l'atmosfera che ha una temperatura maggiore sul fondo , grazie al riscaldamento della terra da parte del sole , e temperatura minore a una maggiore altitudine. La differenza di temperatura $\delta T = T_w - T_c$ é il parametro caratteristico del sistema che controlla l'evoluzione del fluido. Prima di affrontare una trattazione formale del flusso di *Rayleigh-Bénard* cercheremo di scoprire intuitivamente quali siano le condizioni che portano all'inizio del moto convettivo. In breve, quando il gradiente di temperatura tra le due diverse parti della cella diventa sufficientemente grande, una piccola parte del fluido che si sta muovendo verso l'alto sar sottoposta ad una spinta idrostatica verso l'alto dovuta alla diminuzione della temperatura e dunque all'aumento di densità : la parte di fluido in espansione avrà densità minore rispetto a quella del fluido e dunque tenderá a salire. Se questa forza é elevata il *pacchetto* di fluido si muoverá verso l'alto piú velocemente di quanto cali la temperatura : visto che inizialmente il pacchetto é piú freddo dell'ambiente tenderá a cedere energia termica al fluido che lo circonda. In questo modo la corrente convettiva inizierà a fluire. D'altra parte se la forza idrostatica a cui é sottoposto il pacchetto di fluido é relativamente debole, la temperatura di questo calerà prima che questo si possa muovere di una distanza significativa , dunque il pacchetto rimarrá in posizione stabile.

Dal punto di vista qualitativo si può dare una descrizione piú completa del sistema. Si immagini di voler studiare la stabilità del fluido con la condizione che questo sia inizialmente in equilibrio. Si considera quindi una piccola porzione di fluido distribuita verticalmente di un tratto Δz : la

temperatura in questa porzione varierá di

$$\Delta T = \frac{\delta T}{h} \Delta z \quad (1)$$

Prima di procedere nella trattazione si deve ricavare l'equazione di diffusione per l'energia termica che permetterà di utilizzare relazioni formali per la perdita di energia termica del fluido.

1.2 Equazione di diffusione dell'energia termica

La diffusione si può spiegare a livello microscopico considerando il movimento casuale delle molecole : l'urto tra molecole in spazi dove la densità elevata porterá ad uno spostamento medio delle molecole da regioni con alta concentrazione ad altre con bassa concentrazione. Il flusso delle molecole viene solitamente espresso in termini di una densità di corrente , ovvero il numero di particelle che attraversano una determinata area in un tempo δt . Se si definisce con $C(x, y, z)$ la piú generale funzione che descrive la concentrazione nel mezzo si ha che

$$\vec{j} = -D \cdot \vec{\nabla} C(x, y, z) \quad (2)$$

con ovvia definizione di

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

D rappresenta il coefficiente di diffusione. In queste condizioni vale anche l'equazione di continuitá dunque

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x, y, z, t) \quad (3)$$

Combinando le equazioni (2) e (3) si ha che

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \cdot \nabla \cdot (\vec{\nabla} C) \equiv D \cdot \nabla^2 C \quad (4)$$

con ovvia definizione del Laplaciano. Il passaggio dalla concentrazione alla temperatura é immediato : in quest'ultimo caso la diffusione é provocata da un gradiente in temperatura, dunque la corrente si può scrivere come

$$\vec{j}_T = -\sigma_T \vec{\nabla} T(x, y, z) \quad (5)$$

dove T é la temperatura del materiale e σ_T é la conduttivitá termica del materiale. La legge di conservazione prende quindi la forma

$$\frac{\partial \rho_T}{\partial T} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_T \quad (6)$$

ove é stata definita la densitá di energia termica ρ_T : una variazione di energia termica porterá ad un cambiamento lineare della temperatura, quindi

$$\Delta\rho_T = C_T\Delta T \quad (7)$$

La costante C_T é detta capacitá termica specifica. Combinando le equazioni (6) , (7) e (5) si ottiene quindi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\sigma_T}{C_T}\nabla^2 T \equiv D_T\nabla^2 T \quad (8)$$

ove D_T definisce la *diffusivitá termica* del materiale. Piú generalmente si ha che la temperatura puó variare anche nello spazio , quindi bisogna aggiungere un termine

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = D_T\nabla^2 T \quad (9)$$

1.3 Gradiente termico e tempo caratteristico

Per la distribuzione considerata possiamo approssimare

$$\nabla^2 T \simeq \frac{\delta T}{h^2} \frac{\Delta z}{h} \quad (10)$$

Possiamo definire un tempo di rilassamento termico , δt_T per il quale si ha, utilizzano la (8)

$$\delta t_T \frac{dT}{dt} = \Delta T = \delta t_T D_T \nabla^2 T \quad (11)$$

Utilizzando l'approssimazione di eq. (10) si ha che

$$\frac{\delta T}{h} \Delta z = \delta t_T D_T \frac{\delta T}{h^2} \frac{\Delta z}{h} \implies \delta t_T = \frac{h^2}{D_T} \quad (12)$$

Si consideri ora l'effetto della forza idrostatica sulla porzione di fluido considerata nella prima sezione. Tale forza é proporzionale alla differenza in densitá tra la porzione di fluido e l'ambiente circostante. La stessa differenza é proporzionale al coefficiente di espansione termica α (che definisce la variazione relativa di densitá per unitá di temperatura) e alla differenza di temperatura ΔT . Dunque

$$F = \rho_0 \Delta\rho \cdot g = \alpha\rho_0 g \Delta T = \alpha\rho_0 g \frac{\delta T}{h} \Delta z \quad (13)$$

dove ρ_0 é la densitá originale del fluido e g é l'accelerazione di gravitá. Si assumerá che la forza idrostatica bilanci la forza viscosa del fluido; in questa ipotesi la porzione di fluido considerata si muoverá con una velocitá costante v_z . Dunque per percorrere la distanza Δz occorrerá un tempo $\tau_d = \Delta z/v_z$. Occorre dare prima una descrizione quantitativa dell'effetto viscoso sul moto del pacchetto di fluido.

1.4 Derivazione della forma della forza viscosa

Si consideri un fluido che scorre in direzione \hat{x} e si assuma che la velocità aumenti per y maggiori, ovvero $v_x(y + \Delta y) > v_x(y)$. Se si osserva una piccola porzione del fluido si osserva che la parte di questo immediatamente superiore alla sezione é piú veloce rispetto alla parte inferiore, dunque tende a spingerla in avanti nella direzione \hat{x} . Questa rappresenta la forza agente su una sezione del fluido e viene supposta proporzionale all'area ΔA sulla parte superiore della sezione e alla variazione di velocità per unità di distanza. La forza si può quindi scrivere come

$$F_x(y + \Delta y) = \mu \frac{\Delta v_x}{\Delta y} \Delta A \quad (14)$$

Studiando il limite per $\Delta y \rightarrow 0$ si ottiene una derivata parziale. La variazione della forza per l'asse y si può scrivere come

$$F_x = F_x(y + \Delta y) - F_x(y) = \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Delta y \quad (15)$$

Aggiungendo i contributi della velocità lungo gli assi x e z si ottiene

$$F_x = \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right\} \Delta y \Delta A \equiv \mu \nabla^2 v_x \Delta y \Delta A \quad (16)$$

La forza per unità di volume si ottiene dalla (16) dividendo

$$f_x = \mu \nabla^2 v_x \quad (17)$$

1.5 Effetto viscoso e tempo caratteristico

Dalla (17), considerando che la velocità é distribuita sull'asse \hat{z} si ottiene la relazione

$$f_z = \mu \nabla^2 v_z \simeq \mu \frac{v_z}{h^2} \quad (18)$$

dove si é utilizzata un'approssimazione per il Laplaciano simile alla (10).

La condizione di equilibrio sul fluido si ricava ponendo il modulo della forza idrostatica uguale a quello della forza viscosa. Da questa relazione si ricava

$$v_z = \frac{\alpha \rho_0 g h \delta T}{\mu} \Delta z \implies \tau_d = \frac{\mu}{\alpha \rho_0 g h \delta T} \quad (19)$$

Si tratta quindi di confrontare la (12) con la (19): lo stato termoconvettivo é stabile se il tempo di diffusione termica, δt_T é minore del corrispondente tempo relativo alla mobilità dinamica, τ_d . Se il rapporto é inverso allora la porzione di fluido considerato tenderá a salire verso l'alto sotto l'azione di una forza idrostatica dominante. Si definisce una costante, detto *numero di Rayleigh* che tiene conto della differenza tra questi due stati. Si ricava quindi

$$R = \frac{\alpha \rho_0 g h^3 \delta T}{D_t \mu} \quad (20)$$

2 Equazioni di *Navier-Stokes*

2.1 Derivazione dell'equazione

Il moto di un fluido può essere espresso in termini di flusso del momento (\vec{p}) utilizzando la seconda legge di Newton : per un fluido tale legge si esprime spesso utilizzando un momento per unità di volume. Per il momento nella direzione \hat{x} l'equazione di Newton si riscrive come

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\rho v_x) = F_x \quad (21)$$

dove il secondo termine è stato aggiunto per tener conto della variazione spaziale del momento ρv_x associato alla porzione di fluido considerata. Le forze analizzate per un fluido sono principalmente

- la forza di gravità (e altri tipi di forze proporzionali alla massa , quindi densità) che identificheremo generalmente con f_x
- le forze dovute ai gradienti (pressione , temperatura...)
- la forza di attrito viscoso già trattata nel capitolo precedente

Unendo queste 3 forze possiamo scrivere la composizione

$$F_x = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x \quad (22)$$

Confrontando la (22) con la (21) si ottiene l'equazione di *Navier-Stokes*

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_x = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_x \quad (23)$$

2.2 Applicazione delle equazioni al fluido

Si consideri il sistema fisico introdotto nel primo capitolo. Per questo le equazioni di *Navier-Stokes* (23) per le due direzioni \hat{x}, \hat{y} .

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_z = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z \\ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x \end{cases} \quad (24)$$

Nel caso di un fluido a riposo la temperatura varia linearmente con l'altezza, quindi

$$T(x, z, t) = T_w - \frac{z}{h} \delta T \quad (25)$$

Si vuole studiare la deviazione da questo andamento lineare , nel caso di fluido in moto , cercando una funzione

$$\tau(x, z, t) = T(x, z, t) - T_w + \frac{z}{h} \delta T \quad (26)$$

che quantifichi il discostamento. Se si sostituisce questa definizione nell'equazione di diffusione termica (9) si ottiene la relazione

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \tau - v_z \frac{\delta T}{h} = D_T \nabla^2 \tau \quad (27)$$

Si deve esprimere ora la variazione della densità del fluido in funzione della temperatura : é la differenza di densità che mette in moto la convezione. Si può utilizzare uno sviluppo in serie di potenze

$$\rho(T) = \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial T}(T - T_w) + \dots \quad (28)$$

Utilizzando la definizione (26) e definendo il coefficiente di espansione termica $\alpha \equiv -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ si ottiene la forma per la densità

$$\rho(T) = \rho_0 - \alpha \rho_0 \left[-\frac{z}{h} \delta T + \tau(x, z, t) \right] \quad (29)$$

Si può sostituire questa approssimazione nell'equazione (24) , utilizzando l'approssimazione di *Boussinesq* , ovvero trascurando la variazione della densità in tutti i termini , eccetto quello gravitazionale. L'equazione (24) per l'asse \hat{z} diventa quindi

$$\rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho_0 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_z = -\rho_0 g - \alpha \rho_0 \frac{z}{h} \delta T - \frac{\partial p}{\partial z} + \alpha g \rho_0 \tau(x, z, t) + \mu \nabla^2 v_z \quad (30)$$

Se il fluido non é in convezione (é a riposo) si ha che $v_z = 0$, quindi $\tau = 0$ e dunque deve essere soddisfatta la relazione

$$-\rho_0 g - \alpha \rho_0 \frac{z}{h} \delta T - \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Tale relazione ci suggerisce di introdurre un gradiente di pressione che si annulla quando il fluido é a riposo. Si tratta quindi di trovare una funzione p' tale che

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 g + \alpha \rho_0 \frac{z}{h} \delta T \quad (31)$$

La funzione piú generale che soddisfa alla relazione (31) é data da

$$p' = p + \rho_0 g z + \alpha \rho_0 \frac{z^2}{2} \frac{\delta T}{h} \quad (32)$$

Utilizzando la definizione (31) le equazioni (24) si scrivono nella forma

$$\begin{cases} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_z = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \alpha \tau g + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 v_z \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_x = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 v_x \end{cases} \quad (33)$$

infatti $\partial p' / \partial x = \partial p / \partial x$.

3 Variabili adimensionali

Per rendere le equazioni (33) leggibili occorre definire una serie di variabili adimensionali : in questo modo si é possibile vedere quali combinazioni di parametri sono importanti per determinare il comportamento del sistema. Innanzitutto si definisce una variabile tempo adimensionale¹

$$t' = \frac{D_T}{h^2} t \quad (34)$$

Analogamente si definiscono delle variabili spazio adimensionali ed una variabile temperatura adimensionale.

$$x' = \frac{x}{h} \quad ; \quad z' = \frac{z}{h} \quad ; \quad \tau' = \frac{\tau}{\delta T} \quad (35)$$

A partire da x', z' si può inoltre definire una velocità adimensionale con la definizione cinematica usuale

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{h}{D_T} v_x \quad (36)$$

Infine il Laplaciano in questo nuovo set di coordinate si trasforma come

$$\nabla'^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = h^2 \nabla^2 \quad (37)$$

Utilizzando queste variabili nella (33) e moltiplicando per $h^3/\nu D_T$, ove $\nu \equiv \mu/\rho_0$, si ottiene

$$\begin{cases} \frac{D_T}{\nu} \left[\frac{\partial v'_z}{\partial t'} + \vec{v}' \cdot \vec{\nabla}' v'_z \right] = -\frac{h^2}{\nu D_T \rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{\alpha \delta T g h^3}{\nu D_T} \tau' + \nabla'^2 v'_z \\ \frac{D_T}{\nu} \left[\frac{\partial v'_x}{\partial t'} + \vec{v}' \cdot \vec{\nabla}' v'_x \right] = -\frac{h^2}{\nu D_T \rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \nabla'^2 v'_x \end{cases} \quad (38)$$

Nella forma delle equazioni (38) si notano alcune costanti di cui discuteremo ora l'importanza. Si possono definire

- Il numero di Prandtl σ definito da

$$\sigma \equiv \frac{\nu}{D_T}$$

. Questa costante misura la rilevanza della viscosità (dissipazione di energia meccanica dovuta al contatto del fluido) in rapporto alla diffusione termica (dissipazione di energia termica dovuta al flusso di calore).

¹Si noti l'analogia con il tempo caratteristico definito nel primo capitolo δt_T

- Il numero di Rayleigh , R definito da

$$R \equiv \frac{\alpha g h^3}{\nu D_T} \delta T$$

: questo rappresenta una misura adimensionale della differenza di temperatura tra la parte alta e quella bassa della cella.

- Una pressione adimensionale Π definita da

$$\Pi \equiv \frac{p' h^2}{\nu \rho_0 D_T}$$

Utilizzando queste ultime definizioni le equazioni (38) , insieme alla (9) si riscrivono in un unico sistema . Visto che il cambiamento di variabili $x \mapsto x'$ (etc..) non cambia la descrizione fisica si possono eliminare gli apici in modo da alleggerire la notazione. Il sistema completo é quindi dato da.

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_z \right] = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + R\tau + \nabla^2 v_z \\ \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_x \right] = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \nabla^2 v_x \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \tau - v_z = \nabla^2 \tau \end{cases} \quad (39)$$

4 La funzione di corrente (*streamfunction*)

La velocità in un fluido 2-dimensionale in un certo punto identificato dalla coppia di coordinate (x, z) si può esprimere in termini della funzione di corrente, definita da

$$d\Psi = v_x dz - v_z dx \quad (40)$$

Le velocità si ottengono derivando

$$v_x = -\frac{\partial \Psi(x, z, t)}{\partial z} \quad ; \quad v_z = \frac{\partial \Psi(x, z, t)}{\partial x} \quad (41)$$

Sostituendo queste relazioni nell'ultima equazione della (39) si ottiene

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + (v_x \hat{x} + v_z \hat{z}) \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \tau - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \nabla^2 \tau \quad (42)$$

ovvero

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \nabla^2 \tau \quad (43)$$

Utilizzando lo stesso tipo di ragionamento per le altre equazioni del sistema (39) si ottiene

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right] = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + R\tau + \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \frac{1}{\sigma} \left[-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right] = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{cases} \quad (44)$$

Per semplificare le equazioni si può derivare la prima equazione rispetto ad x e sottrarre la seconda, derivata rispetto a z . Si ottiene l'equazione

$$\frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Psi) - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right\} \right] = R \frac{\partial \tau}{\partial x} + \nabla^4 \Psi \quad (45)$$

5 Espansione in serie di Fourier, Troncamento di Galerkin e condizioni al contorno

La risoluzione dell'equazione (45) é molto complicata se non si semplifica la notazione. In particolare, per equazioni differenziali alle derivate parziali si può cercare una soluzione che possa essere scritta come prodotto di funzioni, ognuna delle quali abbia una dipendenza dalle sole variabili x, z, t . Visto che la simmetria della cella é rettangolare le ci aspettiamo di poter trovare una soluzione della forma

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{m,n} e^{\omega_{m,n} t} \{A_m \cos \lambda_m z + B_m \sin \lambda_m z\} \cdot \{C_n \cos \lambda_n x + D_n \sin \lambda_n x\} \quad (46)$$

dove le λ rappresentano le lunghezze d'onda delle varie componenti spettrali dello sviluppo di Fourier e le $\omega_{m,n}$ sono le rispettive frequenze. Sarebbe d'uopo inoltre trovare un'equazione simile per la temperatura τ . La seconda parte del procedimento consiste nel sostituire quindi questo sviluppo nell'equazione (45) e calcolare le derivate. Questa procedura porterá ad una raccolta di infinite equazioni alle derivate parziali: tale raccolta deve essere ridotta attraverso un processo di *troncamento*. Il troncamento di Galerkin consiste nel scegliere una raccolta molto limitata di termini sinusoidali e cosinusoidali in modo che la funzione di corrente, cosí come la funzione τ , soddisfi le condizioni al contorno. In realtà questo procedimento non é ben giustificato teoricamente ma i risultati numerici dimostrano che per un certo intervallo di parametri questa approssimazione é corretta. Si devono quindi esprimere le condizioni al contorno per le funzioni τ e Ψ : visto che τ rappresenta la deviazione dal gradiente di temperatura lineare e osservato che la temperatura ai due estremi della cella é fissata si ha che

$$\tau = 0 \text{ a } 0, 1$$

(z é espresso in unitá di h , ovviamente). Per la funzione di corrente conviene studiare le condizioni al contorno per le componenti della velocitá. Verrá dunque assunto che ai due estremi della cella la componente verticale della velocitá sia nulla, dunque $v_z = 0$ in $0, 1$. Si assumerá inoltre che la forza di *shear* (giá vista nel moto viscoso) sia trascurabile sempre in $0, 1$: questo

equivale a porre²

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \text{ in } z = 0, 1$$

. Per il modello di Lorenz queste condizioni sono soddisfatte solo dalle seguenti funzioni

$$\Psi(x, z, t) = \psi(t) \sin \pi z \sin ax \quad (47)$$

$$\tau(x, z, t) = T_1(t) \sin \pi z \cos ax - T_2(t) \sin 2\pi z \quad (48)$$

dove il parametro a deve essere determinato. Da queste equazioni si nota innanzitutto il comportamento convettivo del fluido, ben visibile nella parte spaziale della funzione di corrente. Inoltre la forma della funzione per la deviazione termometrica é composta da due parti: la parte T_1 da la differenza di temperatura tra le parti superiori ed inferiori della cella convettiva mentre la parte T_2 da la deviazione dall'andamento lineare per la temperatura nel centro della cella convettiva, come funzione³ della coordinata z .

6 Forma finale delle equazioni di Lorenz

Si devono quindi sostituire le soluzioni (47) e (48) nelle equazioni (45) e (43). Si vede innanzitutto che i Laplaciani si riducono a

$$\begin{cases} \nabla^2 \Psi = -(a^2 + \pi^2) \Psi \\ \nabla^4 \Psi = (a^2 + \pi^2)^2 \Psi \end{cases} \quad (49)$$

Inoltre i termini tra parentesi si semplificano e si ottiene, dall'equazione (45)

$$-\frac{d\psi(t)}{dt} (a^2 + \pi^2) \sin \pi z \sin ax = -\sigma R T_1(t) \sin \pi z \sin ax + \sigma (a^2 + \pi^2)^2 \psi(t) \sin \pi z \sin ax \quad (50)$$

La precedente equazione é vera solo se i coefficienti del seno si uguagliano, ovvero se

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{\sigma R}{\pi^2 + a^2} T_1(t) - \sigma (\pi^2 + a^2) \psi(t) \quad (51)$$

Lo svolgimento dell'equazione (43) é piú complicato. Sostituendo l'equazione prende la forma

$$\begin{aligned} & \dot{T}_1 \sin \pi z \cos ax - \dot{T}_2 \sin 2\pi z + (\pi^2 + a^2) T_1 \sin \pi z \cos ax \\ & - 4\pi^2 T_2 \sin 2\pi z - a\psi \sin \pi z \cos ax = \\ & - [\pi\psi \cos \pi z \sin ax] [aT_1 \sin \pi z \sin ax] - \\ & [a\psi \sin \pi z \cos ax] [\pi T_1 \cos \pi z \cos ax] + \\ & [\psi \sin \pi z \cos ax] [2\pi T_2 \cos 2\pi z] \quad (52) \end{aligned}$$

²Si veda l'equazione (14) e la trattazione per ricavare la forza viscosa in un fluido.

³Il segno - é stato scelto in modo che T_2 sia positiva: la temperatura nel fluido deve ricadere tra T_w e T_c .

Inizialmente si raccolgono tutti i termini che contengono $\sin \pi z \cos ax$: l'ultimo termine dell'equazione precedente in questo raccoglimento é dato da $2\pi\psi T_2 \cos 2\pi z$. Usando le identitá trigonometriche si puó riscrivere il termine come

$$\sin \pi z \cos ax \cos 2\pi z = \left(-\frac{1}{2} \sin \pi z + \frac{1}{2} \sin 3\pi z \right) \cos ax$$

Il termine che coinvolge $\sin 3\pi z$ ha una dipendenza spaziale piú rapida di quanto consentito nelle soluzioni scelte quindi possiamo eliminare il termine. A questo punto si possono quindi eguagliare coefficienti dei termini che contengono $\sin \pi z \cos ax$ ottenendo :

$$\dot{T}_1 = a\psi - (\pi^2 + a^2)T_1 - \pi a\psi T_2 \quad (53)$$

I termini rimanenti nell'equazione per la temperatura condividono il fattore $\sin 2\pi z$ quindi si possono uguagliare i coefficienti

$$\dot{T}_2 = \frac{\pi a}{2}\psi T_1 - 4\pi^2 T_2 \quad (54)$$

Per arrivare alla forma standard delle equazioni di Lorenz bisogna fare alcuni cambi di variabili. Innanzitutto si definisce un'altra variabile tempo adimensionale data da $t'' = (\pi^2 + a^2)t'$. In seguito si definiscono

$$X(t) = \frac{a\pi}{(\pi^2 + a^2)\sqrt{2}}\psi(t) \quad (55)$$

$$Y(t) = \frac{r\pi}{\sqrt{2}}T_1(t) \quad (56)$$

$$Z(t) = \pi r T_2(t) \quad (57)$$

ove r é detto numero di Rayleigh ridotto ed é definito da $r = Ra^2/(a^2 + \pi^2)$. Con l'introduzione del parametro aggiuntivo $b = 4\pi^2/(a^2 + \pi^2)$, che rappresenta il rapporto tra l'altezza dello strato e la lunghezza orizzontale del movimento di convezione, si arriva alla forma standard delle equazioni di Lorenz

$$\dot{X} = p(Y - X) \quad (58)$$

$$\dot{Y} = rX - XZ - Y \quad (59)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \quad (60)$$

7 Analisi del sistema

Il modello di Lorenz rappresenta un esempio di sistema nonlineare, le cui soluzioni hanno un andamento non prevedibile. Si noti che questo modello, in virtú della sua nonlinearitá, sviluppa un comportamento dipendente

dal tempo , anche se le condizioni sul fluido sono fissate (T_w , T_c) e uguali per ogni valore di t .⁴ Pi generalmente diremo che i sistemi nonlineari possono rompere spontaneamente la simmetria di traslazione temporale delle equazioni, ovvero in generale le equazioni al tempo t non corrispondono con quelle calcolate al tempo $t + \Delta t$. Si elencano ora le principali proprietà delle equazioni contenute nel modello di Lorenz , riferendosi al sistema seguente

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} = rX - XZ - Y \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases} \quad (61)$$

7.1 Proprietá delle equazioni

Simmetria Le equazioni di Lorenz hanno una simmetria naturale per paritá rispetto a X, Y . Questa simmetria viene mantenuta per ogni valore dei parametri σ, b, r .

Invarianza per Z L'asse Z ($X = 0, Y = 0$) é invariante : tutte le traiettorie che iniziano su questo asse rimangono su questo e tendono verso l'origine. Inoltre tutte le traiettorie che ruotano intorno all'asse Z lo fanno in senso orario⁵.

Esistenza di un insieme chiuso globalmente attrattivo di volume zero

La divergenza del flusso é data da

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -(\sigma + b + 1) \quad (63)$$

Quindi un elemento di volume V_0 viene contratto dal flusso in uno dal volume

$$V e^{-(\sigma+b+1)\tau}$$

in un tempo τ .

⁴Nei sistemi lineari la risposta ad una forza *costante* é , dopo un opportuno transiente , costante nel tempo.

⁵Infatti se $X = 0$ allora

$$\frac{dX}{dt} = \begin{cases} > 0 \text{ per } Y > 0 \\ < 0 \text{ per } Y < 0 \end{cases} \quad (62)$$