Onde di Rossby forzate dall'orografia

Guido Cioni

13 febbraio 2013

Le onde di Rossby sono strutture che caratterizzano i moti atmosferici a scala sinottica e planetaria. La loro presenza si può notare nei meandri dei jet streams alle medie latitudini ed è dovuta al meccanismo che stabilizza i flussi da ovest. Queste onde sono originate dal fatto che i flussi westerlies possono oscillare in direzione Nord-Sud intorno alla posizione di equilibrio per effetto della conservazione della vorticità potenziale espressa come

$$\frac{D}{Dt}\left(-g\frac{\partial\theta}{\partial p}(\zeta+f)\right) \tag{1}$$

In questa legge di conservazione, a cui è dovuta l'oscillazion, f rappresenta l'effetto Coriolis terrestre ed è quindi una caratteristica intrinseca del sistema di riferimento; ζ è invece una quantità caratteristica del fluido geofisico che si aggiusterà in modo da rendere la conservazione totale sempre verificata. Inutile ricordare che ci troviamo in approssimazione adiabatica ed inviscida. Ipotizzando una soluzione oscillante e sostituendo nell'equazione di conservazione della vorticità assoluta si ottiene la relazione di dispersione per le onde di rossby *libere*:

$$\frac{\omega}{k} = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2+l^2} \tag{2}$$

ove k, l sono i numeri d'onda rispettivamente zonale e meridionale, $\bar{u}$ è il vento zonale, $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$. Le onde sono stazionarie se e solo se $\bar{u} = \beta/(k^2+l^2)$ ed in questo caso sono dirette da Ovest verso Est. Le onde di Rossby *libere* sono però poco rilevanti data la loro scarsa ampiezza, dovuta alla debole forzatura sulle scale molto ampie su cui queste si muovono. Le onde di Rossby forzate, invece, sono molto importanti a livello meteorologico: possono essere eccitate da gradienti zonali di temperatura e/o dalle montagne. Per trattare il secondo caso consideriamo quindi un fluido barotropico in moto adiabatico, confinato tra un livello superiore H ed uno strato inferiore ad altezza variabile $h(x, y)$. L'equazione della vorticità barotropica

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi' + \beta\frac{\partial\psi'}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

deve essere modificata per inserire la sorgente di vorticità dovuta alla variazione di spessore della colonna di fluido. Sappiamo che per un cilindro vale la conservazione

$$\frac{D}{Dt}\left[\delta A(\zeta+f)\right] = \frac{D}{Dt}\left[\frac{\zeta+f}{\delta z}\right] \tag{4}$$

infatti $\delta A = M/\rho\delta z = \mathrm{COST}/\delta z$. Nel nostro caso la variazione di spessore è $H-h$ dunque

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\zeta+f}{H-h}\right) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\zeta}{H-h}\right) + \frac{D}{Dt}\left(\frac{f}{H-h}\right) = 0 \tag{5}$$

ovvero

$$(H-h)\frac{D\zeta}{Dt} + \zeta\frac{Dh}{Dt} + (H-h)\frac{Df}{Dt} + f\frac{Dh}{Dt} \tag{6}$$

che si ottiene sviluppando le derivate e ricordandosi che H è costante sia nel tempo che nello spazio (top boundary fisso).

Adottiamo le ipotesi dello scaling quasi-geostrofico per cui

$$\mathrm{Ro} = \frac{U}{fL} = \frac{U/L}{f} = \frac{|\zeta_g|}{f} \ll 1$$

e quindi $|\zeta_g| \ll f$ per cui si possono trascurare i termini in cui ζ moltiplica h visto che anche questa è piccola rispetto ad H. Si arriva quindi all'equazione

$$\frac{D\zeta}{Dt} + \frac{Df}{Dt} - \frac{h}{H}\frac{Df}{Dt} + \frac{f}{H}\frac{Dh}{Dt} = 0 \tag{7}$$

D'altra parte[1] $h/H \ll 1$ e $\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial y} \sim 10^{-11}$ quindi trascurando il penultimo termine si ottiene

$$\frac{D\zeta}{Dt} + \frac{Df}{Dt} + \frac{f}{H}\frac{Dh}{Dt} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi' + \beta\frac{\partial\psi'}{\partial x} = -\frac{f_0}{H}\bar{u}\frac{\partial h}{\partial x} \tag{8}$$

con f_0 calcolato alla latitudine centrale. Prendiamo una topografia sinusoidale e la solita generica componente per la streamfunction

$$\begin{cases} h(x,y) = h_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\cos(ly) \\ \psi(x,y) = \psi_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\cos(ly) \end{cases} \tag{9}$$

Il problema ammette una soluzione stazionaria la cui ampiezza si può ottenere andando direttamente a sostituire nell'equazione:

$$\psi_0 = \frac{f_0 h_0}{H(k^2 + l^2 - k_s^2)} \tag{10}$$

dove $k_s^2 = \beta/\bar{u}$ è il numero d'onda risonante. La soluzione con $k^2 + l^2 = K^2 = k_s^2$ diverge, caratteristica decisamente poco realistica. Per curare questo aspetto si aggiunge all'equazione per la vorticità un termine di dissipazione dovuto all'attrito nel boundary layer:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi' + \beta\frac{\partial\psi'}{\partial x} + \tau^{-1}\nabla^2\psi' = -\frac{f_0}{H}\bar{u}\frac{\partial h}{\partial x} \tag{11}$$

dove τ è il tempo caratteristico di spin down (3-8 giorni). La soluzione stazionaria complessa in questo caso è quindi

$$\psi_0 = \frac{f_0 h_0}{H(k^2 + l^2 - k_s^2 - \mathrm{i}\epsilon)} \tag{12}$$

che conserva il massimo dell'ampiezza nella risonanza ma elimina la singolarità.

[1] Infatti $\frac{\partial f}{\partial y} \sim \frac{10^{-5}}{R\cdot\Delta\varphi}$